This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

2 61 51 Leav St

T
G c

1837
ARTES SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

302
.B758

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, de la Société Royale de Londres.

SECONDE PARTIE.

A PARIS,
Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR,
rue Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LVI.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

MVSEVM
BRITAN
NICVM

BRITISH MUSEUM
SALE DUPLICATE
1787

AVANT-PROPOS.

JE m'acquitte avec autant d'empreſſement que de reconnoiſſance de mes engagements envers le Public. L'accueil favorable qu'il a fait à la premiere partie de cet Ouvrage, m'a ſoutenu contre les difficultés que préſentoit l'exécution de la ſeconde. L'eſpoir du ſuccès m'animoit. J'avois au moins un gage certain de l'indulgence de mes Juges.

Dans la premiere partie j'ai expoſé les regles pour l'intégration des différentielles qui n'ont qu'une ſeule variable, ou changeante; celle-ci explique les méthodes connues pour intégrer les différentielles qui en contiennent deux, ou un plus grand nombre. Je la diviſe en deux Sections, dont l'une a pour objet celles de ces différentielles qui ſont du premier ordre, & l'autre celles qui ſont d'un ordre plus élevé.

De toutes les méthodes inventées pour éclaircir ces matieres obſcures & compliquées, celles qui embraſſent un plus grand nombre de cas ſont, ſans contredit, les plus utiles. C'eſt à développer les plus générales de ces méthodes, à en faire voir l'application à des cas éloignés

388271

& qui y paroiſſent le moins réductibles, que je me ſuis ſur-tout attaché. Pour épargner aux commençants des eſſais qui, toujours pénibles, ſeroient ſouvent infructueux à l'égard de quantités & d'équations qui ne peuvent être intégrées ſans préparation, j'ai placé à la tête de cette ſeconde partie l'expoſition du Théorême qui apprend à reconnoître quand l'intégration directe eſt poſſible, ou non. J'ai donné à l'expoſition de ce Théorême toute l'étendue néceſſaire pour ne laiſſer, je crois, aucun embarras ſur la maniere de s'en ſervir ; & dans toute la ſuite de l'Ouvrage j'en fais un uſage preſque continuel.

La méthode développée dans le Chap. VII. de la premiere Section eſt auſſi d'une très-grande généralité. On verra que la difficulté d'intégrer pluſieurs équations ſe réduit ſouvent à les ramener au cas dans lequel la méthode du Chapitre VII. ſuppoſe les équations différentielles pour les intégrer. Celle du Chapitre XV. de la même Section eſt auſſi une des plus ingénieuſes & des plus fécondes ; d'autant mieux que M. d'Alembert à qui nous la devons, ainſi que preſque la moitié des méthodes contenues dans ce Volume & dans le précédent, l'a étendue aux différentielles d'un ordre quelconque.

La plûpart de ces méthodes ſont dans les volumes de 1746, 1748, 1750 des Mémoires de l'Académie de Berlin.

J'ai trouvé, dans la ſeconde Section, l'occaſion de faire voir par un exemple, comment deux méthodes, rapprochées l'une de l'autre, ſe prêtent un jour mutuel & acquierent quelquefois un degré d'évidence & de généralité que les inventeurs ne leur avoient pas donné. Il y a toujours à gagner à ces ſortes de combinaiſons ; puiſque ſouvent, même en manquant le but qu'on ſe propoſe, on trouve une vérité qu'on ne cherchoit pas. D'ailleurs ces méthodes qui tendent à la même fin, qui ſont fondées ſur les mêmes principes, qui preſque toutes ont les mêmes procédés, ont néceſſairement entre elles un rapport ſenſible. Peut-être à force d'en étudier la liaiſon & d'en chercher la dépendance réciproque, parviendroit-on à rendre l'inſtrument univerſel & en même temps plus ſimple.

Que ne pouvons-nous pas nous promettre à cet égard des travaux réunis & conſtants de pluſieurs Géometres du premier ordre, dont les pas ont déja franchi un eſpace immenſe ? Le Public attend avec impatience le Traité du Calcul Intégral de M. Fontaine. Son but eſt

de réduire tout ce Calcul à une regle fondamentale & générale. Les eſſais de ce Traité qui ont déja été lus à l'Académie des Sciences & dont l'Hiſtoire de cette Académie (Année 1742.) fait mention, mettent en droit d'eſpérer tout de l'Ouvrage même.

SUPPLÉMENT
A LA PREMIERE PARTIE.

COmme on m'a fait appercevoir dans la premiere partie de cet Ouvrage quelques endroits qui n'avoient pas, pour tout le monde, ce degré de clarté que je m'étois proposé de leur donner ; & qu'on m'en a indiqué d'autres, où le calcul pouvoit être simplifié ; je vais éclaircir & réformer ces endroits, & corriger en même temps les fautes d'impression dont j'ai pu m'appercevoir. Je suivrai dans ce Supplément l'ordre des pages.

PAGE 11. LIGNE 15. Placez la lettre O à l'angle des asymptotes, & nommez : OC, x, au lieu de BC.

Page 15. *ligne* 1. $\frac{dx}{y} = y$, lisez $\frac{dx}{x} = dy$.

Page 21. *ligne* 10. $y^z\,dz\,lx\,ly =$, lisez $y^z\,dz\,lx\,ly +$.

Page 35. *Lemme* 6. La supposition faite dans la démonstration de ce Lemme, que $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, &c. pourroit faire naître quelques difficultés. Quoique la vérité du Lemme n'en subsistât pas moins, il est cependant à propos de montrer comment on peut se passer de cette supposition.

Soient donc a, b, $-h$, &c. les cosinus des arcs AB, AF, AI, &c. a, b, $-h$ feront les différentes valeurs

de c dans les équations aux cosinus, trouvées p. 31. Donc ces équations auront pour diviseurs $c-a$, $c-b$, $c+h$, &c.

Supposons ces équations multipliées par 2 & faisons $2c=u$; les transformées qui en naîtront, auront pour diviseurs $u-2a$, $u-2b$, $u+2h$, &c. Or on sait que si dans chacune de ces transformées on substitue à u une quantité quelconque P, la quantité dans laquelle chacune d'elles se change par cette substitution a pour diviseurs $P-2a$, $P-2b$, $P+2h$. Donc si à u on substitue $\frac{1+xx}{x}$, les transformées qu'on aura dans ce cas auront pour diviseurs $\frac{1+xx}{x}-2a$, $\frac{1+xx}{x}-2b$, $\frac{1+xx}{x}+2h$, &c. Maintenant en faisant le calcul, on verra facilement que la forme générale de ces transformées est, $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}}$. Donc $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}} = \left(\frac{1+xx}{x}-2a\right).\left(\frac{1+xx}{x}-2b\right).\left(\frac{1+xx}{x}+2h\right).$ &c. $= \frac{(1+xx-2ax).(1+xx-2bx).(1+xx+2hx).\text{ &c.}}{x^{\lambda}}$. Donc enfin $1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda} = (1-2ax+xx).(1-2bx+xx).(1+2hx+xx).$ &c. $= \overline{KB}^2 \times \overline{KF}^2 \times \overline{KI}^2 \times$ &c.

Page 38. *ligne* 2. AF, lisez AE.

Ibid. *ligne* 17. Lisez $\sqrt{1+2hx+xx}$, au lieu de $\sqrt{1+hx+xx}$.

Page 42. *ligne* 17. $\frac{AdA+BdB}{Aa+BB}\times$, lisez $\frac{AdA+BdB}{AA+BB}+$:

Page 43. *ligne* 16. $\int h \times \frac{ada-bdb}{aa+bb}$, lisez $\int h \times \frac{ada+bdb}{aa+bb}$.

Page

Page 46. *ligne* 7. Comme 9 eſt à 1 : *liſez*, comme g eſt à 1.

Ibid. *ligne* 15. *juſqu'à* 21 : *pour plus de clarté* : *liſez ce qui ſuit* : $\overset{\cdot\cdot}{s\sqrt{-1}} = \overset{\cdot\cdot}{s\sqrt{-1}}^{\frac{1}{9}}$. Or cette derniere quantité ſe rapporte à $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$, en faiſant $a=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{s}$, $h=0$. Donc (LXX. n°. 4.) $\overset{\cdot\cdot}{s\sqrt{}}-1$ ſe rapporte à $A+B\sqrt{-1}$, & par conſéquent auſſi $\gamma+\overset{\cdot\cdot}{s\sqrt{}}-1$.

Page 51. *ligne* 18. $+y$: *liſez* $+y^m$.

Page 80. *ligne* 16. au lieu de fy : *liſez*, gy.

Ibid. *ligne* 22. $\frac{2gz}{g-2z}$ ou bien, &c. *liſez* $\frac{gg}{g-2z}$ ou bien $\frac{2gz}{g-2z}$.

Page 102. *ligne pénultieme.* $-(X)$: *liſez* $+(X)$.

Page 117. *ligne* 14. Il eſt évident, &c. *liſez*, Il eſt évident qu'on aura toujours un triangle rectangle, dont les côtés autour de l'angle droit ſeront dx & dy, & dont l'hypotenuſe ſera du.

Page 121. *ligne* 26. *liſez*, d'un quadrilatere d'hyperbole équilatere par rapport à ſes aſymptotes : les coordonnées ayant leur origine à la diſtance 1 du ſommet.

Page 129. *ligne* 20. un nombre entier poſitif : *liſez*, un nombre entier pair poſitif.

Page 133. *ligne* 11. $\frac{-x^m dx}{rr(zz+rr)}$, *liſez* $\frac{-z^m dz}{r^r(zz+\frac{1}{rr})}$.

Page 152. *ligne* 5. $\frac{(f+fa-g)}{b-a}$: *liſez* $(f+\frac{fa-g}{b-a})$.

Page 159. *ligne* 14. la fonction de x : *liſez*, le coefficient de x.

Page 171. *ligne* 11. $Gz^r\,dx$: *liſez*, $Gz^r\,dz$.

Ibid. *ligne* 18. *liſez*, *s* étant un nombre impair poſitif ou négatif; & cette quantité s'intégrera, ou abſolument, quand *s* eſt poſitive (Art. CVI. n°. 1.), ou par la quadrature du cercle (Art. CVI. n°. 2.), lorſque *s* eſt négative.

Page 180. *On peut ſupprimer depuis la ligne* 4 *incluſivement, juſqu'à la ligne* 7 *excluſivement.*

Page 181. *ligne* 15. $1+x=$ &c. *liſez* $1+x^{\lambda}=$.

Page 199. *ligne* 8 *&* 9. demi-axe conjugué : *liſez* axe conjugué.

Page 204. *ligne* 14. = enfin $\frac{-bb\,du}{u\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu\pm fu-bb}}$. Pour montrer clairement ce qui a pu conduire à ajouter à la différentielle ce qu'on lui a ajouté, mettons-la ſous cette forme $-\frac{\frac{bb\,du}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}$; il eſt facile de voir que $\frac{bb\,du}{uu}$ eſt la différentielle du terme $-\frac{bb}{u}$ qui eſt ſous le ſigne. Donc il ne manque que du dans le numérateur, pour que la différentielle ſoit complete. Donc au lieu de notre différentielle nous pourrons prendre la ſuivante;

$$-\frac{du+\frac{bb\,du}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}+\frac{du}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}.$$

La premiere partie a pour intégrale (Art. VIII.) $-2\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}$, ou $-\frac{2\sqrt{uu\pm fu-bb}}{\sqrt{u}}$. La ſeconde n'eſt autre choſe que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu\pm fu-bb}}$, qui ſe rapporte à l'Article CCVI.

Page 220. *ligne* 3. eſt égal à celle de : *effacez* celle de.

Page 224. *ligne* 1. *changez le double ſigne* $\pm$ *en* $\mp$.

Page 227. *ligne* 16. On aura une différentielle, &c. C'eſt ce qu'on peut voir de la maniere ſuivante. Puiſque $f+gx+hxx+x^3=(k+lx+mx^2).(c\pm x)$, en faiſant $c\pm x=z$, on aura une transformée de cette forme $[a.(\pm z\mp c)+b]^p\times\pm z^{\frac{n}{2}}\,dz\times(k'+l'z+mz^2)^{\frac{n}{2}}$; donc, &c.

Page 231. *ligne* 2. & $xx=$ &c. On peut ſimplifier ce calcul de la façon ſuivante. Subſtituez la valeur de x, qui vient d'être trouvée, dans l'équation $g'zx+\delta z=g+lx+kx^2$ & vous aurez tout de ſuite $g+lx+kxx=\delta z+g'z\times\left\{\frac{g'z-l}{2k}\pm\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}$, d'où l'on tire immédiatement le dénominateur $\sqrt{\varphi+\frac{1}{z}\times\left\{\delta z+g'z\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)\pm\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}}$; réduiſant, &c. *comme juſqu'à la ligne* 10, je multiplie &c. On peut ſe diſpenſer de cette opération, parce que le numérateur & le dénominateur ſont chacun diviſibles par la quantité qui multiplie $\frac{dz}{k}$, ce qui conduit ſur le champ à $\frac{\pm dz}{\sqrt{z}.\sqrt{\text{ &c.}}}$, *ligne* 12. *page ſuivante.*

Quant à la remarque qui ſuit, page 233, on peut trouver auſſi facilement, ſans le ſecours du calcul qui précede, que la propoſée ſe rapporte aux logarithmes, toutes les fois que $\delta\delta-\frac{\delta g'l}{k}+\frac{gg'g'}{k}=0$. Car il eſt ſûr que la propoſée ſe réduira aux logarithmes, lorſque $g'x+\delta$ ſera

diviſeur de $g+lx+kx^2$. Suppoſant donc qu'il le ſoit, & faiſant la diviſion, juſqu'à ce qu'il n'y ait plus d'x au dividende, on trouvera, en égalant le reſte à zéro & en réduiſant, $\delta\delta - \frac{\delta g'l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$.

Page 234. *ligne* 17. eſt du troiſieme degré: *liſez*, eſt 3.

Page 235. *ligne* 20. Les quadratures de ces quatre équations: *liſez*, les quadratures des courbes repréſentées par ces quatre équations.

Ibid. *ligne* 23. ſa quadrature ſe réduira: *liſez*, la quadrature de cette courbe ſe réduira.

Page 237. *ligne* 14. $dx = ydu$, effacez $dx =$.

Ibid. *ligne* 15. Faites ainſi, pour plus de ſimplicité, le calcul ſuivant. Je multiplie la différentielle $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ haut & bas par $4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}$. & j'ai $\frac{4kdu+4ludu+4mu^2du+4nu^3du}{4\sqrt{k+lu^2+mu^3+nu^4}}$, ou bien $\frac{kdu+2ludu+3mu^2du+4nu^3du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}} + \frac{3kdu+2ludu+mu^2du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}$. Il eſt évident que la premiere partie a pour intégrale $\frac{\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}{2}$. A l'égard de la ſeconde, elle ſe réduit à trois autres, dont la premiere qui a pour numérateur $3kdu$ s'integre par les ſections coniques, en faiſant $u = \frac{1}{z}$. La ſeconde qui ſe réduit à $\frac{ldu\sqrt{u}}{2\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ eſt de la forme de celle dont nous cherchons l'intégrale; & la troiſieme ſe réduit à $\frac{mudu}{4\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}}$, à laquelle, après l'avoir miſe ſous cette forme,

$\frac{m}{8n} \cdot \frac{2nudu}{\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}}$, on voit qu'il ne manque pour être une différentielle complete, que d'avoir à ſon numérateur $-\frac{kdu}{uu}+mdu$. Cette troiſieme partie ſe réduira donc, pour ſon intégration, à l'intégrale $\frac{m}{4n}\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}$, à la différentielle $\frac{\frac{m}{8n}\cdot kdu}{u\sqrt{u}\cdot\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$, qui ſe rapporte aux ſections coniques en faiſant $u=\frac{1}{z}$; & enfin à la différentielle $\frac{-\frac{m^2}{8n}\cdot du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$, de la même forme que celle dont nous cherchons l'intégrale.

Donc la différentielle $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ eſt compoſée de deux parties qui s'integrent abſolument, de deux parties dépendantes des ſections coniques, & enfin de $\left(\frac{l}{2}-\frac{mm}{8n}\right)\cdot\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$. Donc l'intégrale de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ dépend de celle de $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$, c'eſt-à-dire, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 241. *ligne derniere* : d'une quadrature du troiſieme ordre : *liſez*, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 244. *ligne* 3. xx : liſez, x.

Page 246. *ligne* 14. $2xxdx$: liſez, $2cxdx$.

Page 248. *ligne* 17. elle ne dépend pas toujours de

$\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$: mais elle peut dépendre ou de $\frac{x^2dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{xdx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou enfin de $\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$. Dans le premier cas elle s'integre exactement. Dans le second & le troiſieme elle dépend des ſections coniques.

Page 253. *ligne* 7. fonctions de x : *liſez*, de z.

Page 259. *ligne* 6. au dénominateur $\sqrt{9A+Bu}$ &c. : liſez $\sqrt{A+Bu}$ &c.

Page 277. *ligne* 3. $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$ donne, &c. Le calcul qui ſuit peut s'abreger en cette maniere ; $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$ donne $x^2dx = \frac{-2azdz+3gdz}{3z^4}$; donc $x^2zdx = \frac{-2azdz+3gdz}{3z^3}$; *ce qui intégré conduit tout de ſuite à la ligne* 7.

Ibid. *ligne* 22. Ay, liſez Ay^λ.

Page 292. *ligne* 10. Si l'on avoit $\int(rdx\int udx)$: *ajoutez ces mots* : r & u étant des fonctions quelconques de x.

Ibid. *ligne* 15. *en titre*, SECOND CAS ; *effacez ce titre & les deux lignes qui ſuivent. Liſez à la marge :* Autre exemple du premier cas ; *& au lieu de* $\int(dx)\times\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3$, liſez $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$ *dans cet article & le ſuivant.*

Page 294. *Art.* CCCII. *juſqu'à la ligne* 14 : *liſez ce qui ſuit.* Soit propoſée $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$; $\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt l'expreſſion d'un arc de cercle dont x eſt le ſinus verſe & r le rayon : Soit, en ſuppoſant le rayon 1, z la valeur de cet arc ; rz ſera ſa valeur, le rayon étant r. De même ſi cof. z repréſente le cofinus de cet arc, le rayon étant

1, r cos. z repréſentera le coſinus du même arc, le rayon étant r. On aura donc $x = r - r$ cos. z ; or cos. $z =$ &c.

Au reſte il eſt bon de marquer en paſſant la différence de ces deux expreſſions r cos. z & cos. rz. La premiere exprime le coſinus de l'arc z pris dans un cercle dont le rayon eſt r ; la ſeconde repréſente le coſinus d'un arc, le nombre de fois r plus grand que z, les arcs rz & z étant pris dans le même cercle ; d'où l'on voit que r cos. z & cos. rz ſont deux expreſſions qu'il ne faut pas confondre.

Page 296. ligne derniere. Entre l'article CCCV. *qui termine cette page & l'article* CCCVI. *qui commence la ſuivante, inſérez ces mots :*

SECOND CAS.

Ce ſecond cas a lieu, quand les quantités affectées du ſigne $\int$ ſont multipliées les unes par les autres. Il n'a aucune difficulté. Prenez chaque intégrale en particulier, & multipliez-les enſuite entre elles, le produit ſera la valeur de l'expreſſion propoſée. Ainſi $\int(x\,dx) \times \int(gx^3\,dx) = \frac{x^2}{2} \times \frac{gx^4}{4} = \frac{gx^6}{8}$.

Page 316. ligne 20. ajoutez ce qui ſuit. On peut par le même Théorême tranſformer tout nombre irrationel donné en une ſuite infinie de termes purement rationels. Soit, par exemple, la quantité irrationelle $\sqrt{10}$, je la tranſforme en $\sqrt{9+1}$, c'eſt-à-dire, en un radical binome dont la premiere partie ſoit un quarré ; & alors élevant par le moyen de la formule le binome $9+1$ à la puiſſance

$\frac{1}{2}$, on aura une ſuite infinie de termes tous rationels.

Page 324. *ligne* 18. d'un nombre plus grand que l'unité. *Entre cette ligne & l'Art.* CCCXL, *ajoutez* : mais moindre que 2. En effet ſi $1+z$ étoit ſeulement égal à 2, alors z étant 1, les deux termes du dénominateur binome ſeroient égaux & la ſerie ſeroit fautive; à plus forte raiſon, lorſque z ſurpaſſe 2.

On peut néanmoins employer cette ſerie à trouver les logarithmes des nombres plus grands que l'unité; mais il faut pour cela calculer les logarithmes de nombres moindres que 2, & qui ſoient tels que, multipliés entre eux, ou diviſés les uns par les autres, ils produiſent le nombre dont on cherche le logarithme. Par exemple, ſachant que $\frac{\frac{12}{10}\times\frac{12}{10}}{\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}}$, ou bien $\frac{1,2\times 1,2}{0,8\times 0,9} = 2$, je calcule par le moyen de la premiere ſerie le logarithme de 1, 2 en ſuppoſant $z = 0,2$. Je calcule pareillement les logarithmes de 0, 8 & 0, 9 par le moyen de la ſeconde formule en ſuppoſant $z = 0,2$ pour l'un, & 0, 1 pour l'autre. J'ajoute les logarithmes trouvés de 0, 8 & 0, 9 & je retranche la ſomme du double du logarithme de 1, 2, ce qui donnera le logarithme de 2. Si on ſe donne la peine de faire ce calcul, on trouvera ce logarithme $= 0,693147180559$ &c. De même puiſque $\frac{2\times 2\times 2}{0,8} = 10$, en triplant le logarithme que nous venons de trouver, & retranchant celui de 0, 8, on aura le logarithme de 10 exprimé par 2.302585092994 &c. C'eſt

ce

ce que (page 10. Art. XV.) nous avions promis de donner.

Lorſque par ce moyen on a formé les logarithmes de quelques nombres, on peut enſuite avoir ceux des autres nombres d'une maniere plus expéditive. La méthode conſiſte à trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur de tel nombre d'unités qu'on voudra. Pour cet effet, ſoit a la ſomme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, x leur différence; la fraction ſera $\frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x}$, ou $\frac{a+x}{a-x}$. La différentielle du logarithme de cette fraction ſera $\frac{2adx}{aa-xx}$; laquelle réduite en ſerie par la diviſion & enſuite intégrée, donne pour le logarithme de cette même fraction $2\times\left\{\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\frac{x^9}{9a^9}+\text{&c.}\right\}$: intégrale à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que quand $x=0$, elle devient $=0$, ainſi que cela doit être. Car lorſque $x=0$, la fraction $\frac{a+x}{a-x}$ devient $\frac{a}{a}=1$, dont le logarithme eſt ici $=0$.

Maintenant s'il s'agit de trouver le logarithme d'un nombre quelconque a, celui d'un autre nombre b étant donné; je chercherai par cette formule le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$, ſi a eſt plus grand que b, ou $\frac{b}{a}$, s'il eſt plus petit: ce logarithme étant trouvé, je l'ajouterai dans le premier cas au logarithme ſuppoſé connu de b, & j'aurai le logarithme de $\frac{a}{b}\times b$; c'eſt-à-dire de a. Dans le ſecond cas je retrancherai du logarithme connu de b, celui de la fraction $\frac{b}{a}$, & j'aurai le logarithme de $\frac{b}{\frac{b}{a}}=b\times\frac{a}{b}=a$.

Au reſte, il ne faut pas perdre de vue que les logarithmes dont nous parlons ici, ſont les logarithmes hyperboliques; & que pour réduire à ceux des tables ordinaires les logarithmes trouvés par les moyens que nous venons d'indiquer, il faut multiplier ces derniers par le nombre conſtant 0, 43429448 &c. La raiſon en eſt que les logarithmes d'un même nombre pris dans différentes logarithmiques ſont entre eux comme les ſous-tangentes de ces logarithmiques. Or les logarithmes appellés hyperboliques, ſont ceux que donneroit la logarithmique dont la ſous-tangente $= 1$, & ceux des tables appartiennent à une logarithmique dont la ſous-tangente $= 0, 43429448$ &c. Donc ſi en général on nomme l le logarithme hyperbolique d'un nombre donné; L ſon logarithme pris dans les tables ordinaires, on aura $1 : 0, 43429448$ &c. :: $l : L$. Donc $L = l \times 0, 43429448$ &c.

Par une méthode ſemblable à celle que nous venons d'employer pour trouver le logarithme du nombre $1 + z$, on peut parvenir à trouver l'expreſſion générale de c^x, (c étant le nombre dont le logarithme eſt 1, & x une quantité quelconque). On ſuppoſera pour cet effet $c^x = 1 + z$; donc $x = l(1 + z)$ & conſéquemment $x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ &c.; équation de laquelle tirant, par la méthode inverſe des ſeries, la valeur de z en x, on aura $z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}$ &c. donc $1 + z$ ou $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c.

Je remarquerai ici que cette expreſſion trouvée pour c^x démontre ce que nous avons ſuppoſé dans la premiere Partie (Art. CCCVII.), ſavoir que $c^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1}$ lorſque z eſt très-petite.

J'obſerverai encore qu'on peut par ce moyen trouver la valeur de c. En effet puiſque $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ &c. en ſuppoſant $x = 1$, on a $c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. $= 2,7182818$ &c.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 14 Janvier 1756.

NOUS Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné la ſeconde Partie de l'Ouvrage de Monſieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral.*

Cette ſeconde Partie traite de l'Intégration des Quantités différentielles à deux ou pluſieurs variables, & acquitte par conſéquent l'engagement que l'Auteur avoit pris avec le public. Elle eſt diviſée en deux livres.

Le premier a pour objet l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent deux ou pluſieurs variables. M. de Bougainville après quelques Définitions & Propoſitions préliminaires, traite d'abord de l'intégration des quantités ou équations différentielles qui n'ont beſoin pour cela d'aucune préparation ; il donne le moyen de connoître & de diſtinguer ces ſortes de quantités ou équations, & de les intégrer. Il paſſe enſuite à l'intégration des équations qui ont beſoin d'être préparées par quelque opération particuliere ; & comme pour l'ordinaire, cette opération conſiſte à ſéparer les Indéterminées, M. de Bougainville, après avoir enſeigné à conſtruire une Equation différentielle dont les indéterminées ſont ſéparées, donne différentes méthodes pour ſéparer les indéterminées dans une Equation propoſée, ſoit par la voie des multiplications & des diviſions, ſoit par celle des transformations. Le premier uſage qu'il en fait, a pour objet les Equations homogenes, & après avoir montré comment on peut conſtruire ces équations dans tous les cas, il

enſeigne comment on peut réduire pluſieurs Equations au cas de l'homogénéité.

Il paſſe de là à l'intégration d'une eſpece d'Equations qui a ſouvent lieu dans la ſolution des Problêmes ; c'eſt celle dont M. Bernoulli a donné le premier l'Intégrale dans les Journaux de Leipſic de 1697. M. de Bougainville, après avoir donné une méthode particuliere d'intégrer ces ſortes d'Equations, fait voir comment on peut y réduire un grand nombre d'Equations propoſées. Ces principes établis, il traite en général des équations à trois & quatre termes, & montre dans quels cas on peut les intégrer. Il n'oublie pas la fameuſe équation de *Ricati*, ni même des équations plus compliquées, dont celle de *Ricati* n'eſt qu'un cas.

De là il paſſe à l'intégration des Equations où les deux différentielles ſont élevées à différentes puiſſances ; le cas des Equations homogenes ſe retrouve encore ici, mais ſous une forme bien plus générale. M. de Bougainville montre de plus comment on peut intégrer dans beaucoup d'autres cas les Equations dans leſquelles les deux différentielles ſe trouvent mêlées enſemble, ou élevées à des puiſſances plus grandes que l'unité.

L'Auteur fait voir enſuite comment on peut employer dans certains cas la méthode des Coefficients indéterminés pour intégrer en même temps pluſieurs équations qui contiennent chacune un certain nombre de variables ; & comment on peut ſe ſervir de cette même méthode pour déterminer une Intégrale par certaines conditions données de la Différentielle.

Le ſecond Livre traite de l'intégration des Equations ou quantités différentielles à pluſieurs variables, du ſecond ordre & au-delà, en ſuppoſant conſtante telle différentielle qu'on juge à propos. Il contient, ainſi que le Livre premier, toutes les méthodes que les Géometres ont trouvées juſqu'à préſent ſur le Calcul qui en eſt l'objet ;

l'Auteur ſait par-tout ſe rendre propres ces méthodes par l'intelligence & la clarté avec laquelle il les a développées.

Cette Seconde Partie ne nous paroît pas moins digne que la premiere de l'approbation de l'Académie, & de l'impreſſion. *Signé*, NICOLE; D'ALEMBERT.

Je certifie le préſent Extrait conforme à ſon original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Janvier 1756.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Fautes à corriger dans la Seconde Partie.

Page 19. ligne 24. $\frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz}$, liſez $\frac{dC}{dx}, \frac{dB}{dz}$.

Page 58. ligne 6. $byyx^{\frac{1}{2}}$, liſez $byyx^{\frac{1}{2}}dx$.

Page 116. & 117. effaçez V^{-1} & V''^{-1}.

Page 154. ligne 15. $\pm nyydx^2$, liſez $\pm n$.

Page 155. ligne 1. $\pm ndx^2$, liſez $\pm n$; *idem* ligne 8.

N'ayant pu revoir moi-même les épreuves de cette ſeconde Partie, à cauſe d'un voyage que j'ai été obligé de faire & d'une maladie aſſez longue qui l'a ſuivi, je m'en ſuis repoſé ſur l'exactitude de M. Bezout, Cenſeur Royal & très-habile Maître de Mathématiques, qui a bien voulu s'en charger. Ceux qui voudront s'inſtruire à fonds du Calcul intégral & de la Géométrie tranſcendante, ne ſauroient mieux faire que de le prendre pour guide.

TRAITÉ

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE,

Où l'on traite de l'Intégration des Différentielles à deux ou plusieurs variables.

Nous avons donné dans la premiere partie de ce Traité les regles que les Géometres ont trouvées jusqu'à présent pour intégrer les différentielles qui n'ont qu'une variable. Nous allons exposer dans cette seconde partie ce que l'on sait sur l'intégration de celles qui en contiennent deux ou un plus grand nombre.

Nous diviserons cette seconde partie en deux Sections.

Division générale de cette Seconde Partie.

La Premiere contiendra les regles d'intégration des différentielles à plusieurs variables qui ne passent pas le premier ordre ; telles que sont les suivantes, $xydx + xxdy$; $\frac{xdy - ydx}{xx}$, &c.

LA SECONDE traitera de l'intégration des différentielles à pluſieurs variables d'un ordre plus élevé ; telles que $xdxddy$; $y^3x^1dydyddddx$, &c. qui s'écrivent encore de la façon ſuivante, $xdxd^2y$; $y^3x^1dy^2d^1x$, & en général $dx^n d^m y$.

Obſervation ſur l'addition de la conſtante à l'intégrale trouvée.

Il ne faut pas oublier qu'il eſt auſſi néceſſaire ici d'ajouter une conſtante à l'intégrale trouvée, pour la rendre complette, ainſi qu'on l'a fait dans la premiere Partie. Nous nommerons cette conſtante $+C$, C étant poſitif ou négatif.

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer auparavant les indéterminées, & sans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

I.

LA différentielle de xy est, comme on le sait, $ydx + xdy$. Donc l'intégrale de $ydx + xdy$ est $xy \pm C$. Par la même raison $yxdz + yzdx + xzdy$ a pour intégrale $xyz \pm C$. En général $y^m x^n$ ayant pour différentielle $mx^n y^{m-1} dy + ny^m x^{n-1} dx$, l'intégrale de cette derniere quantité est $y^m x^n \pm C$.

1°. Lorsqu'elles sont des quantités entieres.

II.

On sait encore que la différence d'une fraction, est la différence du numérateur multipliée par le dénominateur,

2°. Lorsqu'elles sont fractionnaires

moins la différence du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout diviſé par le quarré du dénominateur. Ainſi la différence de $\frac{z}{u}$ eſt $\frac{udz-zdu}{uu}$. Donc l'intégrale de $\frac{udz-zdu}{uu}$ eſt $\frac{z}{u} \pm C$. De même l'intégrale de $\frac{by^m x^{n-1} dx - mx^n y^{m-1} dy}{x^{2m}}$ eſt $\frac{x^n}{y^m} \pm C$.

III.

En général ſi on nomme ξ une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y, l'intégrale de $\xi dY + Y d\xi$ eſt $Y\xi \pm C$; & $\frac{\xi dY - Y d\xi}{\xi^2}$ a pour intégrale $\frac{Y}{\xi} \pm C$.

IV.

3°. Lorſqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puiſſances.

Nous avons vu dans la premiere partie de ce Traité que toutes les fois que dans une formule compoſée d'une ſeule variable & de conſtantes, la quantité hors du ſigne étoit la différentielle de la quantité ſous le ſigne; l'intégrale de cette formule eſt la quantité même ſous le ſigne dont l'expoſant eſt augmenté de l'unité, diviſée par ce même expoſant ainſi augmenté de l'unité. Il en eſt de même pour les formules différentielles compoſées de pluſieurs variables & de conſtantes, pourvu qu'elles aient la condition que nous venons d'énoncer.

Ainſi l'intégrale de $(dx + dy) \cdot \sqrt{x+y}$ eſt $\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} \pm C$: celle de $(2adx + 2bdy) \cdot (ax+by)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $4 \cdot (ax+by)^{\frac{1}{2}} \pm C$. Enfin celle de

$\frac{x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx}{2.(x^3y+y^3x)^{\frac{1}{2}}}$ est $(x^3y+y^3x)^{\frac{1}{2}} \pm C$.

V.

Si l'on avoit en général à intégrer $(xdy+ydx+2ydy).(xy+yy)^{\frac{n}{m}}$, l'intégrale en seroit $\frac{m}{m+n}.(xy+yy)^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & de même celle de $\frac{xdy+ydx+2ydy}{(xy+yy)^{\frac{n}{m}}}$ est $\frac{m}{m-n}.(xy+yy)^{\frac{m-n}{m}} \pm C$. Il en est ainsi de beaucoup d'autres.

VI.

Si cependant on étoit embarrassé dans ces cas, & que l'intégrale ne se présentât pas d'abord, on la trouveroit sur le champ en se servant des transformations enseignées dans la premiere Partie. Ainsi en faisant dans $(xdy+ydx+2ydy).(xy+yy)^{\frac{n}{m}}$, $xy+yy=z$; on aura pour transformée $z^{\frac{n}{m}}dz$, dont l'intégrale est par la regle fondamentale de tout ce calcul $\frac{m}{n+m}z^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & en remettant pour z sa valeur, on aura l'intégrale cherchée. Il en est de même pour toutes les différentielles qui sont dans le même cas.

VII.

On a établi que toutes les fois que le numérateur d'une fraction composée d'une seule indéterminée & de constantes, est la différentielle du dénominateur, l'intégrale de la proposée est le logarithme du dénominateur. Cette regle a encore lieu, lorsque la fraction contient deux ou

4°. Lorsque ces quantités renferment des Logarithmes.

plusieurs indéterminées avec les mêmes conditions.

Suivant cette regle l'intégrale de $\frac{dx+dy}{x+y}$ est $l(x+y) \pm C$: celle de $\frac{xdy+ydx}{xy}$ est $lxy \pm C$: De même $\int \frac{xdy+ydx-2ydy}{2xy-2yy} = l(xy-yy)^{\frac{1}{2}} \pm C$. En général $\int \frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - (m+n) y^{m+n-1} dy}{rx^m y^n - ry^{m+n}} = l(x^m y^n - y^{m+n})^{\frac{1}{r}} \pm C$, en supposant que la sous-tangente de la logarithmique est 1. C'est ce qu'on trouvera tout de suite en supposant $x^m y^n - y^{m+n} = z$: car alors on aura la transformée suivante $\frac{dz}{rz}$, dont on sait que l'intégrale est $l(z)^{\frac{1}{r}}$. Donc, &c.

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII.

Ce que c'est qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque.

Lorsqu'une quantité différentielle quelconque est supposée égale à zéro, on l'appelle équation différentielle. Toute équation différentielle est du même ordre que les quantités différentielles de l'ordre le plus élevé, qu'elle renferme; c'est-à-dire que l'équation $z^m dz + 2zdu + udz = 0$, dans laquelle les quantités différentielles dz & du sont du premier ordre, est du premier ordre. La suivante $\frac{a^2 y^2 dx^2 + 2a^2 yxdydx + a^2 x^2 dy^2}{y^4 x^4} = 0$ est encore du premier. Celle-ci $ddu + xdxdu + vdu^2 = 0$ est du second ordre; & ainsi de suite.

IX.

L'intégration des équations différentielles du premier

ordre s'appelle autrement méthode inverſe des tangentes. En voici la raiſon. La méthode directe des tangentes n'eſt autre choſe que la méthode de trouver la tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée ; c'eſt-à-dire (Sect. II. des Infiniment-Petits) de trouver la valeur de la ſous-tangente $\frac{y\,dx}{dy}$, ou ce qui eſt la même choſe de $\frac{dx}{dy}$, en ſuppoſant qu'on ait une équation en x & en y.

Ce que c'eſt que la méthode inverſe des tangentes.

Or une équation différentielle du premier ordre étant donnée, on a la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ou de $\frac{y\,dx}{dy}$ en x & en y, c'eſt-à-dire, l'expreſſion de la ſous-tangente. L'intégration de cette équation donnera évidemment l'équation de la courbe. Donc cette intégration fera connoître la courbe dont la ſous-tangente eſt ſuppoſée donnée ; & ainſi elle eſt l'inverſe de la méthode directe des tangentes, qui conſiſte à trouver la ſous-tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée.

X.

Les regles pour intégrer les équations différentielles ſont à peu près les mêmes que les précédentes. Il y faut cependant ajouter un nouveau principe.

LEMME. Quand une différentielle eſt égale à zéro, ſon intégrale, s'il eſt poſſible de la trouver, doit être ſuppoſée égale à une conſtante qu'on prendra arbitrairement, en ſuivant toutesfois la loi des homogenes. Par exemple, ſi on a $\frac{2z\,u\,du - u\,u\,dz}{z\,z} = 0$ dont l'intégrale eſt $\frac{u\,u}{z}$, on la ſuppoſe égale à une grandeur conſtante a, ce qui donne $\frac{u\,u}{z} = a$, ou $u\,u = a\,z$, pour l'intégrale complete.

Lemme préparatoire.

Voyons maintenant des équations qui s'intégrent sans aucune préparation.

XI.

Premier Exemple.

Ce que nous avons dit plus haut nous fait découvrir sur le champ que l'équation $xdy+ydx=uzdt+utdz+ztdu$ est la différentielle exacte de celle-ci $xy-uzt+C=0$; car il suffit pour s'en appercevoir de regarder les deux membres de cette équation comme deux différentielles particulieres, & d'en prendre séparément l'intégrale.

XII.

On suivra la même regle pour l'intégration de beaucoup d'autres équations dans lesquelles les différentielles sont élevées au quarré, au cube, &c.

Si l'on a, par exemple, l'équation suivante, $x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=a^4dx^2$; pour l'intégrer j'en prends la racine quarrée. Cette opération me donne $xdy+ydx=a^2dx$, donc l'intégrale est $xy-aax+C=0$.

XIII.

Qu'on propose l'équation $a^3ydx=fy^3dy+h^2y^2dz+a^3xdy$, qui est la même que celle-ci, $a^3ydx-a^3xdy=fy^3dy+h^2y^2dz$; ou bien encore, la même que cette autre $\frac{a^3ydx-a^3xdy}{yy}=fydy+h^2dz$; je vois sans peine que l'intégrale de cette équation est $\frac{a^3x}{y}-\frac{fyy}{2}-h^2z+C=0$.

XIV.

XIV.

Scholie. De ce que dans l'exemple précédent l'équation n'eſt devenue intégrable qu'après que l'un & l'autre membre en a été diviſé par yy, il eſt aſſez ſimple de penſer qu'il pourroit y avoir beaucoup de différentielles qui n'étant pas intégrables dans la forme ſous laquelle on nous les préſente, le deviendroient, ſi on les multiplioit ou ſi on les diviſoit par quelques fonctions de leurs variables.

D'autres auſſi deviendront intégrables en ſe ſervant des ſubſtitutions enſeignées dans le Chapitre ſecond de la premiere Partie, pour les transformer; d'autres enfin demanderont des opérations plus compoſées. Mais comme ſouvent les différentielles à pluſieurs variables ſont très-compliquées; qu'il eſt par conſéquent difficile de reconnoître les méthodes qui leur conviendroient; & que même quelquefois on eſſayeroit inutilement de les leur appliquer; avant que d'entrer dans le détail des méthodes particulieres, nous en allons expoſer une générale qui apprend à reconnoître ſi une quantité ou une équation quelconque compoſée d'un nombre quelconque de variables & de leurs différentielles (dans l'état où elle eſt propoſée) eſt intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures. Lorſque l'intégration eſt poſſible, cette méthode nous apprend à trouver l'intégrale. Souvent même, lorſque la quantité ou l'équation dans l'état dans lequel on

la propoſe n'eſt pas intégrable, la même méthode nous fait trouver le facteur qui en l'affectant la rend ſuſceptible d'intégration. Cette méthode eſt fondée ſur un Théorême dont nous ferons le plus grand uſage dans toute la ſuite de ce Traité.

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle compoſée de pluſieurs variables eſt la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problême néceſſaire pour ce qui ſuit.

AVant que d'expoſer cette méthode, il eſt néceſſaire de donner ici la ſolution d'un Problême dont on ne peut ſe paſſer. Ce Problême conſiſte à différentier les quantités de la forme de $\int A dx$; A eſt une fonction de x & de y, telle que c'eſt x qui a varié; au lieu qu'on demande ici la différentielle de $\int A dx$, y variant & x étant conſtant.

XV.

PROBLEME. Différentier les quantités de la nature de $\int A dx$, en ſuppoſant y variable & x conſtant.

Nous allons d'abord donner la ſolution de ce Probleme ſur un exemple.

SOLUTION. Suppoſons que la quantité propoſée à différentier ſoit $\int dx \sqrt{(aa+xx)}$, en faiſant a variable. Je différentie la quantité $\sqrt{(aa+xx)}$ en faiſant ſeule-

ment varier a. Cette opération donne $\frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$. J'en ôte da que je mets devant le signe $\int$ en laissant dx ainsi qu'il étoit sous ce même signe : j'aurai $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ pour la différentielle cherchée de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$; a variant & dx étant constant. C'est ce qui se démontre ainsi.

Soit la courbe BM dont l'équation est $y=\sqrt{(aa+xx)}$, telle que . . . . . $BA = a$ Figure 1.

$AP = x$

$Pp = dx$

$PM = y = \sqrt{(aa+xx)}$;

Menant l'ordonnée infiniment proche pm, on a le petit espace $PMmp = dx\sqrt{(aa+xx)}$. Donc la somme de ces petits espaces, ou l'aire entiere $BAPM$ sera $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$. Soit à présent prolongé BA en b, PM en M', pm en m'; & par les points b, M', m', menée la courbe $bM'm'$. En faisant varier le parametre a & laissant x constant, on aura $MM' = \frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc le petit espace $M'm'Mm = \frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc la somme des petits espaces $M'm'Mm$, ou $BbM'M = \int\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$: or da demeure toujours le même dans toutes les quantités $\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$, puisque $da = Bb$; donc on peut le faire sortir hors du signe d'intégration : donc on a $BbM'M = da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Or $BbM'M$ est l'élément de l'aire $ABMP$; donc la différence de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$ est $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Il est évident qu'on fera le même raisonnement sur tout autre exemple,

XVI.

Solution générale du Problême.

COROLLAIRE. Donc en général la différence de $\int A\,dx$, y étant supposée variable, sera $dy\int \frac{dA}{dy}\,dx$; dans cette quantité, $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'auroit dy dans la différentiation de la quantité A. Ce qu'on voit aisément par l'exemple ci-dessus.

Après la solution de ce Problême, passons à l'exposition de la méthode. Nous l'appliquerons d'abord aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables; ensuite nous l'appliquerons à celles qui en renferment trois ou un plus grand nombre.

§. I. *Exposition de la méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII.

Théorême fondamental.

THÉOREME. Si on différentie une quantité telle que A composée de deux variables t & u, en faisant u variable & t constant, & qu'ensuite on différentie la différentielle qui en résulte en faisant t variable & u constant, on aura la même quantité que si on différentioit d'abord A en faisant u constant & t variable, & qu'ensuite on différentiât la différentielle qui en résulte en faisant t constant & u variable. Par exemple, soit $A = \sqrt{(t^2+nu^2)}$. Différentions cette quantité en supposant t constant, la différentielle sera $\frac{nu\,du}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, qui différentiée de nouveau en traitant u comme constant, donne $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Maintenant différentions A en regardant u comme constant, nous aurons $\frac{tdt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$; dont la différentielle en supposant t constant sera $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui est la même quantité que la précédente.

La démonstration de ce Théorême se tire des principes mêmes du Calcul différentiel.

Démonstration. Mettons dans A, $t+dt$ au lieu de t, A se change en $B=\sqrt{(t+dt)^2+nu^2}$; mettons ensuite dans A au lieu de u, $u+du$, A se change en $C=\sqrt{t^2+n(u+du)^2}$. Enfin si l'on met en même temps dans A au lieu de t, $t+dt$, & au lieu de u, $u+du$, A se change en $D=\sqrt{(t+dt)^2+n(u+du)^2}$. Il est évident par l'inspection seule que si dans B on écrit pour u, $u+du$, B devient D ; & de même, que si dans C on écrit $t+dt$ pour t, C devient D. Cela posé, si on différentie A en regardant t comme constant, on aura $C-A$. La raison en est simple. Car pour différentier une quantité, x, par exemple, il faut supposer que x devient $x+dx$, & alors la différence qu'il y aura entre x dans le premier état & x dans le second sera la différentielle de x; il faudra donc retrancher x de $x+dx$, ce qui donne dx. De même supposant t constant, pour avoir la différentielle de A, il faut substituer dans A à la place de u, $u+du$, ce qui donne C. C est donc ce que devient A au second instant ; la différence entre A au premier instant & A au second instant, ou la différentielle de A sera donc $C-A$. Le calcul est conforme à ce raisonnement.

Car $C-A=\sqrt{t^2+n(u+du)^2}-\sqrt{(t^2+nu^2)}$
$=\frac{(\sqrt{t^2+n(u+du)^2}-\sqrt{t^2+nu^2})\cdot(\sqrt{t^2+n(u+du)^2}+\sqrt{t^2+nu^2})}{\sqrt{t^2+n(u+du)^2}+\sqrt{(t^2+nu^2)}}$
$=\frac{.2nudu+ndu^2}{\sqrt{(t^2+nu^2+2nudu+ndu^2)}+\sqrt{(t^2+nu^2)}}=\frac{nudu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$

qui eſt en effet la différentielle de A en ſuppoſant t conſtant. Si dans $C-A$ on met $t+dt$ au lieu de t, on aura $D-B$, & la différentielle ſera par les raiſons que nous venons d'expoſer $D-B-C+A$.

Maintenant dans A mettons $t+dt$ au lieu de t, nous aurons B, & la différentielle de A en ſuppoſant u conſtant ſera $B-A$. Si dans cette différentielle on écrit $u+du$ au lieu de u, elle devient $D-C$; & la différentielle ſera par conſéquent $D-C-B+A$, différentielle que nous avons trouvée abſolument la même par la premiere opération.

XVIII.

Autre maniere de préſenter le Théorème précédent.

Ce Théorême peut encore ſe préſenter ſous une autre forme qui ſuppoſe toujours les mêmes principes.

THÉOREME. Si $Adx+Bdy$ repréſente la différentielle d'une fonction de x, de y & de conſtantes, la différence de A priſe en ſuppoſant ſeulement y variable & diviſant par dy, eſt égale à la différence de B priſe en ſuppoſant x ſeul variable & diviſant par dx. Ce Théorême s'énonce ainſi algébriquement $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$, ſi $\int Adx+Y=\int Bdy+X$ (Y étant une fonction de y & de conſtantes qu'on peut ajouter à $\int Adx$, & X une fonction de x & de conſtantes qu'on peut ajouter à

$\int B\,dy$). On ſe ſouviendra que $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'aura dy dans la différentiation de A, & $\frac{dB}{dx}$ celui de dx dans la différentiation de B.

Démonstration. Les deux membres de cette derniere équation ſont égaux : donc la différence de l'un eſt égale à la différence de l'autre, quelle que ſoit la quantité que l'on faſſe varier. Donc $B\,dy$ qui eſt la différentielle de $\int B\,dy + X$ en faiſant x conſtant & y variable, ſera la même choſe que la différentielle de $\int A\,dx + Y$ en ſuppoſant auſſi y variable & x conſtant. Donc $B\,dy = dy \int \frac{dA}{dy}\,dx + dY$ (Problême précédent); ou $B = \int \frac{dA}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy}$. Je prends maintenant la différentielle de cette quantité en faiſant varier x ; j'ai $\frac{dB}{dx}\,dx = \frac{dA}{dy}\,dx$, ou $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$.

XIX.

Corollaire. On démontrera de la même maniere que ſi $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$, $A\,dx + B\,dy$ eſt néceſſairement une différentielle complete, c'eſt-à-dire qu'il y aura quelque fonction de x, algébrique, ou dépendante des quadratures, qui en ſera l'intégrale exacte.

XX.

Son application à quelques différentielles.

Premier exemple.

Soit la quantité $x\,dy\,\sqrt{(xx+yy)} + y\,dx\,\sqrt{(xx+yy)}$; je vois qu'elle n'a pas d'intégrale : car la différence de $x\sqrt{(xx+yy)}$ en ſuppoſant x variable, y conſtant, & étant dx, eſt $\sqrt{(xx+yy)} + \frac{xx}{\sqrt{(xx+yy)}}$: celle de

$y\sqrt{(xx+yy)}$ en faisant varier y, supposant x constant & divisant par dy, est $\sqrt{(xx+yy)} + \frac{yy}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Or ces deux différentielles sont des quantités différentes. Donc la différentielle proposée n'a point d'intégrale.

XXI.

Second exemple.

Soit maintenant la quantité différentielle $\frac{ydx-xdy}{xx+yy}$, dont on cherche l'intégrale. Pour m'assurer si cette quantité en a une, soit algébrique, soit dépendante des quadratures, je prends la différence de $\frac{y}{xx+yy}$ en variant seulement y & divisant par dy. Il me vient $\frac{xx-yy}{(xx+yy)^2}$. Je trouve la même quantité pour la différentielle de $\frac{-x}{xx+yy}$ en faisant varier seulement x & ôtant dx. Donc la proposée est intégrable.

XXII.

Il en est de même de toutes les autres différentielles à deux variables, quelque compliquées qu'elles soient. On voit tout d'un coup par le secours de la méthode précédente si elles sont intégrables ou non : ce qui épargne des opérations souvent longues & pénibles, quelquefois même infructueuses, quand la proposée n'est pas une différentielle exacte.

XXIII.

Application du Théorême aux équations différentielles à deux variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux équations différentielles à deux variables. Cette application est facile & se fait avec le même succès. Ainsi pour savoir si l'équation

$Adx +$

$Adx + Bdy = o$ eſt une différentielle exacte, il faut examiner ſi $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. En ce cas l'équation ſeroit intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures; autrement elle ne le ſeroit pas. Nous allons dire, maintenant comment ces ſortes de quantités, ou d'équations, s'intégrent.

Maniere d'intégrer les quantités A dx + B dy ; *& les équations* A dx + B dy = o, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

XXIV.

Lorſqu'une fois on aura reconnu par le Théorême précédent qu'une différentielle telle que $Adx + Bdy$ eſt intégrable, voici la méthode qu'on peut ſuivre pour parvenir à l'intégration. *Appliquée 1°. aux différentielles $Adx + Bdy$.*

J'intègre ſeulement l'un des deux membres, Adx par exemple, en y ſuppoſant y conſtant & x variable : l'intégrale étant trouvée, je la différentie en faiſant y variable & x conſtant; je retranche cette différentielle de Bdy: ſi la différence eſt zéro, c'eſt une marque que $\int Adx$ ſuffit pour l'intégrale de $Adx + Bdy$: ſinon la différence ne peut être qu'une quantité compoſée de y, de dy & de conſtantes, dont l'intégrale étant ajoutée à $\int Adx$, la rendra l'intégrale complete de $Adx + Bdy$.

XXV.

Soit la différentielle $dx\sqrt{y} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{y}} - a\,dy\sqrt[3]{x} =$ *Exemple particulier.*

$\frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$ que nous reconnoîtrons aiſément par le Théorême fondamental être une différentielle exacte ; pour l'intégrer ſuivant la méthode précédente, je prends l'intégrale de $dx\sqrt{y} - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$ en ſuppoſant y conſtant : cette intégrale eſt $x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. Je différentie cette quantité en faiſant x conſtant & y variable ; j'ai pour différentielle $\frac{xdy}{2\sqrt{y}} + ax^{\frac{1}{3}}dy$; laquelle retranchée de $\frac{xdy}{2\sqrt{y}} - ax^{\frac{1}{3}}dy$ donne zéro. Donc l'intégrale complete de la propoſée eſt $x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. C'eſt ce dont on peut ſe convaincre, ſi on différentie cette quantité en faiſant x & y variables.

XXVI.

2°. Application de cette Méthode aux équations $Adx+Bdy=o$.

La même méthode s'applique aux équations différentielles que le Théorême fondamental nous aura montré être intégrables. Il faudra ſeulement obſerver de faire l'intégrale trouvée égale à une conſtante.

XXVII.

SCHOLIE. Il arrive ſouvent, comme on l'a déja vu, que l'équation n'étant pas une différentielle complete, on peut la rendre telle en la multipliant par quelque facteur compoſé de x, de y & de conſtantes. Dans la ſuite de cet Ouvrage nous nous ſervirons du Théorême fondamental pour déterminer ce facteur dans certains cas. On trouve dans les Mémoires de l'Académie, année 1740, une méthode pour découvrir ſouvent quel peut être ce facteur

qui se seroit évanoui en différentiant, à cause de l'égalité à zéro. Cette méthode est des plus ingénieuses ; mais comme elle ne réussit pas toujours, que d'ailleurs le procédé en est assez pénible, nous ne la détaillerons pas ici. On peut la voir dans le Mémoire même que nous venons de citer, dans lequel elle est détaillée d'une maniere exacte & lumineuse. Je passe à l'application du Théorême aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII.

PREMIERE PROPOSITION. Soit $Adx + Bdy + Cdz = 0$ une équation quelconque différentielle contenant trois variables, on s'assurera d'abord si cette équation dans l'état où elle est, ne seroit pas la différentielle exacte de quelque équation à trois variables ; ce qui se découvrira en examinant par le moyen de notre Théorême si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & si $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Si ces trois équations ont lieu à la fois, la quantité $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, sinon elle n'en est pas une.

Moyen de s'assurer si les équations representées par $Adx + Bdy + Cdz = 0$ sont intégrables.

DÉMONSTRATION. Il est évident que $Adx + Bdy + Cdz$ n'a point d'intégrale, si les équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ n'ont pas lieu en même temps. Car si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Bdy$ en soit une en supposant

z constant, & faisant varier x & y, ce qui donne, suivant le Théorême fondamental, $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. De même si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Cdz$ en soit une en supposant y constant, x & z variables ; donc on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$. On fera le même raisonnement sur $Bdy + Cdz$.

Pour prouver l'inverse de cette proposition, savoir que si les trois équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ ont lieu, $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle exacte, il faut faire voir que l'intégrale de $Adx + Bdy$ prise en faisant y & z constans, sera, à une fonction près de y & de z, l'intégrale de $Adx + Bdy + Cdz$, où x, y, z sont variables ; c'est ce qu'on trouve de la façon suivante.

Je différentie $\int Adx$ en faisant x, y, z variables ; j'aurai (Article XVI.) $Adx + dy\int \frac{dA}{dy} dx + dz\int \frac{dA}{dz} dx$. Il ne s'agit que de montrer que cette quantité ne differe de la proposée que par une fonction de y, z, dy, dz, qui soit une différentielle complete : c'est-à-dire qu'il faut s'assurer $Adx - Adx + Bdy - dy\int \frac{dA}{dy} dx + Cdz - dz\int \frac{dA}{dz} dx$, ou en réduisant que $(B - \int \frac{dA}{dy} dx)\, dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx)\, dz$ est une fonction sans x & une différentielle complete.

Or 1°. si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\int \frac{dA}{dy} dx$, ou $\int \frac{dB}{dx} dx$ n'est que B plus une fonction de y & de z sans x. Donc $B - \int \frac{dA}{dy} dx$ est cette fonction sans x.

2°. Si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\int \frac{dA}{dz} dx$, ou $\int \frac{dC}{dx} dx$ n'est que C,

plus une fonction de y & de z sans x. Donc $C - \int \frac{dA}{dz}\,dx$ est cette fonction sans x. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)\,dy + (C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)\,dz$ est une quantité sans x.

Il nous reste à prouver qu'elle est une différentielle complete, ou, ce qui revient au même, que $d\,\underline{(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)}$ $= d\,\underline{(C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)}$. Pour le prouver je remarque que $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ par l'hypothese. Donc en effaçant dans les deux membres de l'équation ce qui se détruit, elle se réduit à $d\,\underline{(\int \frac{dA}{dy}\,dx)} = d\,\underline{(\int \frac{dA}{dz}\,dx)}$. Mais $dy \int \frac{dA}{dy}\,dx + dz \int \frac{dA}{dz}\,dx$ est la différentielle de $\int A\,dx$ en faisant x constant, z & y variables; donc par le Théorême fondamental $d\,\underline{(\int \frac{dA}{dy}\,dx)} = d\,\underline{(\int \frac{dA}{dz}\,dx)}$. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)\,dy + (C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)\,dz$ est une différentielle complete: cette même quantité est une fonction sans x. Donc, &c.

Appliquons la proposition précédente à un exemple.

XXIX.

Soit proposée l'équation différentielle $max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\,dy + nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}\,dx - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{2} - \frac{ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\,dz}{2} = 0$. Pour que cette différentielle soit intégrable, il faut que les trois équations suivantes aient lieu en même temps, Exemple.

1°. $d\left\{nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right\} = d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right)$

$dy \qquad\qquad dx$

y seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

2°. $d\left(\left(n-\frac{1}{2}\right) ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}\right) = d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\right)$

$dz \qquad\qquad 2dx$

z seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

3°. $d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right) = d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\right)$

$dz \qquad\qquad 2dy$

z seul étant variable dans le premier membre & y dans le second. Or les équations ont lieu, puiſqu'on a en même temps $\frac{mnay^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy}{dy} - \frac{amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy}{2dy} =$

$\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right) amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dx}{dx}$, $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right) ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{dz} =$

$\frac{\left(-n+\frac{1}{2}\right) ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dx}{2dx}$, & enfin $-\frac{amy^{m-1} x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{2dz}$

$= -\frac{amx^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1} dy}{2dy}$. Donc l'équation propoſée eſt intégrable. Nous trouverons par la méthode de l'article ſuivant, que ſon intégrale eſt $\frac{ax^n y^n}{\sqrt{xz}} + C = 0$.

XXX.

Intégration des équations différentielles completes à trois variables.

SECONDE PROPOSITION. Lorſque j'ai reconnu que $Adx + Bdy + Cdz = 0$ eſt intégrable, voici la méthode qu'il faut ſuivre pour parvenir à l'intégration. J'integre

d'abord Adx en regardant x comme variable, y & z comme conſtantes. Ce terme étant intégré, ſi la différentielle eſt provenue d'un ſeul terme compoſé de x, y, z & de conſtantes, on aura l'intégrale complete de la propoſée; ſinon il ne pourra manquer à l'intégrale qu'une fonction de y & de z. On trouvera cette fonction de la maniere ſuivante. Je redifférentie la quantité intégrée $\int Adx$ en regardant x comme conſtant, y & z comme variables; je retranche la différentielle qui en réſulte de $Bdy + Cdz$: le reſte ſera une fonction différentielle de y & z, dont l'intégrale ſera la fonction à ajouter à $\int Adx$.

S'il paroiſſoit plus commode d'intégrer d'abord un des deux autres termes $Bdy + Cdz$, on en feroit le maître, & l'opération demeureroit la même pour les deux termes reſtants.

XXXI.

En ſuivant cette méthode, on trouvera l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{abz^2y^{-1}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + 2abx^{\frac{1}{2}}y^{-1}zdz - abx^{\frac{1}{2}}z^2y^{-2}dy = 0$ que nous reconnoîtrons (Art. XXVIII.) être intégrable. Le premier terme intégré en traitant x ſeul comme variable eſt $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}} + C$; & l'on voit au premier coup d'œil, que c'eſt l'intégrale complete de la propoſée. Application à un exemple particulier.

XXXII.

Qu'on nous demande ſi l'équation différentielle ſuivante $abx^{-1}dz + \frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ eſt intégrable Second Exemple.

& quelle en eſt l'intégrale, il ſera facile d'appliquer la méthode précédente à cette différentielle.

J'examine d'abord ſi l'on a les trois équations ſuivantes :

1°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dx}\right\} = \underset{dz}{d\left\{\frac{-by^2}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abz}{xx}\right\}}$, x ſeul variant dans le premier nombre, & z ſeul dans le ſecond ;

2°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dy}\right\} = \underset{dz}{d\left\{\frac{bxy}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}\right\}}$, y ſeul variant dans le premier membre & z ſeul dans le ſecond ;

3°. $\underset{dx}{d\left\{\frac{by}{x\sqrt{(xx+yy)}}\right\}} = \underset{dy}{d\left\{\frac{-by^2 - abz\sqrt{(xx+yy)}}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}\right\}}$, x ſeul variant dans le premier membre, & y ſeul dans le ſecond. Or en différentiant ſuivant les conditions preſcrites, je trouve que les trois équations précédentes ont lieu ; donc l'équation propoſée eſt intégrable.

Cherchons maintenant quelle eſt ſon intégrale. Suivant ce qui eſt dit (Art. xxx.) je prends d'abord celle de $abx^{-1}dz$ en ſuppoſant x conſtant ; j'ai $\frac{abz}{x} \pm C$. Je différentie cette quantité en traitant z comme conſtant & x comme variable ; j'ai $-\frac{abzdx}{xx}$ que je retranche des trois autres termes de la propoſée. Il me reſte après cette opération $\frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$ dont l'intégrale ajoutée à la quantité $\frac{abz}{x}$ ſera l'intégrale complete de la propoſée. Pour intégrer (N) $\frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$, je me ſers de la méthode expoſée (Art. xxiv.) j'intègre le premier terme $\frac{bydy}{x\sqrt{(xx+yy)}}$ en ſuppoſant x conſtant : l'intégrale eſt $\frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Je la différentie en ſuppoſant x ſeule variable ; la différentielle

tielle eſt $\frac{-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$: laquelle retranchée du ſecond terme de la propoſée (N) donne zéro. Donc $\int\frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Donc enfin l'intégrale de l'équation $\frac{abdz}{x} + \frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ eſt $\frac{abz+b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + B = 0$.

XXXIII.

Quand une équation différentielle à trois variables n'eſt pas complete, on peut quelquefois la rendre telle en la multipliant par un facteur commun à tous ſes termes.

Suppoſons préſentement qu'on ait découvert par la méthode de l'Article XXVIII. que l'équation $Adx + Bdy + Cdz = 0$, dans l'état où elle eſt, n'eſt point une différentielle exacte, on cherchera quel eſt le facteur, qui multipliant tous les termes de cette équation la rendroit une différentielle complete.

Je nomme μ ce facteur commun à tous les termes de l'équation, & dont l'addition la rend une différentielle complete; alors $\mu Adx + \mu Bdy + \mu Cdz$ ſera une différentielle complete. Par conſéquent j'aurai les trois équations ſuivantes :

$$\frac{Ad\mu}{dy} + \frac{\mu dA}{dy} = \frac{Bd\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx};$$
$$\frac{Ad\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} = \frac{Cd\mu}{dx} + \frac{\mu dC}{dx};$$
$$\frac{Bd\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} = \frac{Cd\mu}{dy} + \frac{\mu dC}{dy}.$$

Il ne s'agit maintenant que de donner à μ une forme aſſez générale avec des coefficiens indéterminés, pour que cette quantité étant ſubſtituée dans les trois équations précédentes, en faſſe évanouir tous les termes.

Il y a une infinité d'équations différentielles à

Mais avant que de chercher cette forme générale pour μ, il eſt néceſſaire d'avertir que ſouvent on la chercheroit

trois variables qui n'ont point d'intégrales. inutilement, parce qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales.

XXXIV.

Premiere démonſtration. Pour le prouver je reprends les trois équations précédentes,

$$\frac{Ad\mu}{dy}+\frac{\mu dA}{dy}=\frac{Bd\mu}{dx}+\frac{\mu dB}{dx};$$
$$\frac{Ad\mu}{dz}+\frac{\mu dA}{dz}=\frac{Cd\mu}{dx}+\frac{\mu dC}{dx};$$
$$\frac{Bd\mu}{dz}+\frac{\mu dB}{dz}=\frac{Cd\mu}{dy}+\frac{\mu dC}{dy}.$$

J'en fais évanouir les grandeurs $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, $\frac{d\mu}{dz}$, qui ſont des quantités finies; puiſque $\frac{d\mu}{dx}$ &c. exprime le rapport de $d\mu$ à dx, à dy, à dz; rapport qui eſt toujours fini. Je les fais donc évanouir de la même maniere dont on fait évanouir trois inconnues ordinaires; il arrivera que μ s'évanouira en même temps, ce qu'il eſt aiſé de voir par le calcul ſuivant. Des trois équations précédentes on tire $\frac{d\mu}{dy}=\underbrace{\frac{Bd\mu}{dx}+\frac{\mu dB}{dx}-\frac{\mu dA}{dy}}_{A}$ & auſſi $\frac{d\mu}{dy}=\underbrace{\frac{Bd\mu}{dz}+\frac{\mu dB}{dz}-\frac{\mu dC}{dy}}_{C}$.

Donc $\frac{ABd\mu}{dz}+\frac{A\mu dB}{dz}-\frac{A\mu dC}{dy}=\frac{CBd\mu}{dx}+\frac{C\mu dB}{dx}-\frac{C\mu dA}{dy}$.

D'ailleurs on a $\frac{d\mu}{dx}=\underbrace{\frac{Ad\mu}{dz}+\frac{\mu dA}{dz}-\frac{\mu dC}{dx}}_{C}$. Subſtituant cette valeur de $\frac{d\mu}{dx}$ dans l'équation précédente, elle devient $\frac{ABd\mu}{dz}+\frac{A\mu dB}{dz}-\frac{A\mu dC}{dy}=\frac{ABd\mu}{dz}+\frac{B\mu dA}{dz}-\frac{B\mu dC}{dx}+\frac{C\mu dB}{dx}-\frac{C\mu dA}{dy}$. Je réduis cette équation, je la diviſe par μ qui ſe trouve en multiplier tous les termes, après qu'on aura effacé ceux qui ſe détruiſent; j'aurai $\frac{BdC}{dx}-\frac{CdB}{dx}$

$+\frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, équation qui nous apprend que C, A, B, doivent avoir entre eux la relation exprimée par cette équation pour que la proposée $Adx + Bdy + Cdz = 0$ soit intégrable.

XXXV.

Leur différence en cela, des équations à deux variables.

Il n'en est donc pas des équations différentielles à trois variables comme de celles qui n'en ont que deux : car on est fondé à croire (ou du moins on n'a pas démontré le contraire jusqu'à présent) que toute équation différentielle à deux variables se tire de la différentiation de quelque équation en termes finis, au lieu que la démonstration précédente apprend qu'il y a une infinité d'équations à trois variables qui ne peuvent pas être venues par la différentiation d'aucune équation en termes finis.

XXXVI.

Qui expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Il y a plus : sans examiner si les équations différentielles à deux variables viennent de la différentiation de quelque équation en termes finis, il est aisé de prouver qu'elles expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Car soit toute équation différentielle à deux variables représentée par $sdx = rdy$ (s & r étant des fonctions de x, de y & de constantes) ; prenons deux lignes à volonté AB (x) & BC (y) ; nous aurons par conséquent $Bb = dx$, $cc' = dy = \frac{sdx}{r}$. Prenons ensuite

une ligne bb' à volonté pour un ſecond dx, on aura $c'c' = dy = \frac{s\,dx}{r}$, s & r étant des fonctions de Ab & bc'; & ainſi de ſuite; tous les points c, c' appartiendront à la courbe de l'équation donnée. Il eſt vrai qu'on ne peut exécuter cette opération; mais il ſuffit de l'imaginer exécutée, pour démontrer que toute équation différentielle à deux variables exprime toujours quelque courbe conſtructible.

XXXVII.

Il n'en eſt pas ainſi des équations différentielles à trois variables. Toutes celles dans leſquelles l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ n'a pas lieu, ne peuvent être conſtruites en aucune maniere, & les Problêmes dont la ſolution dépendroit d'équations pareilles, ſeroient impoſſibles.

Cette propoſition peut encore ſe démontrer d'une autre maniere indépendante de toute intégration.

Seconde démonſtration. Que pluſieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune conſtruction.

Soit $dz = \omega\,dx + \vartheta\,dy$ une équation quelconque à trois variables, ω & ϑ étant des fonctions quelconques de x, y, z, avec des conſtantes; qu'on ſe propoſe de trouver la ſurface courbe exprimée par cette équation.

Figure 3. Cette démonſtration ſe fait par le moyen des ſurfaces courbes.

Soit AP l'axe des x, AQ celui des y, AR celui des z. Soient de plus PN la tranche de la ſurface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des x, & QN la tranche de la ſurface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des y; l'équation de la tranche PN ſera $dz = \vartheta\,dy$, & celle de la tranche QN ſera $dz = \omega\,dx$.

Imaginons maintenant que qr & pn ſoient deux autres tranches de la ſurface courbe par des plans infiniment près & paralleles aux premiers ; on verra pour lors que ſi l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une ſurface courbe poſſible, il faudra que les deux courbes qr, pn, ſe rencontrent en un point l de la droite kl, ſection des deux plans $q\mu r$, pmn ; c'eſt-à-dire qu'il faudra que l'équation de la courbe qrl ſoit telle, qu'en y faiſant $x = qk$, on ait pour z la même valeur qu'en faiſant dans l'équation de la courbe pnl, $y = pk$.

Pour examiner ſi cela eſt, il faut chercher 1°. la valeur de lk priſe pour une ordonnée de la courbe pnl ; & pour cela conſidérer lk comme ce qu'eſt devenue $r\mu$, lorſque AP eſt devenue Ap ; NM, nm ; PM demeurant la même. C'eſt-à-dire que dans la valeur de $\mu r = z + \vartheta dy$, il faudra mettre au lieu de z, nm, ou $z + \omega dx$, & au lieu de ϑ, ce que devient cette fonction, ſi l'on y ſubſtitue $x + dx$ pour x & $z + \omega dx$ pour z. Par cette opération on aura $lk = z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dx dy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dx dy$.

On cherchera 2°. la valeur de lk priſe pour ordonnée de la courbe qr ; & pour l'avoir, on ſubſtituera dans $nm = z + \omega dx$, $r\mu$, ou $z + \vartheta dy$ au lieu de z, & dans la fonction ω on ſubſtituera pour y, $y + dy$, & pour z, $z + \vartheta dy$, x demeurant conſtant. Par cette voye on aura $lk = z + \vartheta dy + \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$. Donc $z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dx dy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dx dy = z + \vartheta dy$

$+ \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$; ou bien en réduiſant $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$. Donc il faut que cette équation ait lieu, pour que celle-ci $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une ſurface courbe poſſible.

XXXVIII.

COROLLAIRE. Il ſuit de là que l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$ doit être la même que l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; c'eſt ce qu'il eſt aiſé de vérifier : car puiſque l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ eſt la même que $Adx + Bdy + Cdz = 0$, ou que $dz = -\frac{Adx}{C} - \frac{Bdy}{C}$, il faut que $\omega = -\frac{A}{C}$, & que $\vartheta = -\frac{B}{C}$, $d\omega = \frac{AdC - CdA}{CC}$, $d\vartheta = \frac{BdC - CdB}{CC}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$, on aura l'équation $\frac{BdC}{CCdx} - \frac{CdB}{CCdx} + \frac{AdB}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3 dz} = \frac{AdC}{CCdy} - \frac{CdA}{CCdy} + \frac{BdA}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3 dz}$, & en réduiſant $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} = \frac{AdC}{dy} - \frac{CdA}{dy} + \frac{BdA}{dz}$, la même que nous avons trouvée plus haut.

XXXIX.

SCHOLIE. Il eſt évident maintenant que lorſque l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. n'a pas lieu, la propoſée $Adx + Bdy + Cdz = 0$, n'exprime aucune ſurface courbe ; mais pour être certain que la ſurface courbe eſt poſſible, ſi l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. a lieu, il faut s'aſſurer que toutes

les fois que l'on a cette équation, on a le même x, soit qu'on le prenne dans la tranche des y & des x, soit qu'on le prenne dans la tranche des z & des x.

Pour reconnoître que cela sera ainsi, il faut observer que le calcul qui exprimeroit cette nouvelle condition, ne différeroit de celui que nous venons de faire, qu'en ce qu'on auroit des x au lieu des z, & C au lieu de A. Si donc on pratique cette opération, l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ deviendra celle-ci $\frac{BdA}{dz} - \frac{AdB}{dz} + \frac{CdB}{dx} - \frac{BdC}{dx} - \frac{CdA}{dy} + \frac{AdC}{dy} = 0$; qui est la même absolument que la précédente, en changeant les signes & transposant.

Par cette voie l'on démontreroit aussi qu'on trouveroit le même y en le cherchant soit dans la tranche des y & des z, soit dans la tranche des x & des y.

XL.

Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorsqu'elle est susceptible d'intégration ou de construction.

Après avoir donné la méthode qui nous fera reconnoître celles d'entre les équations différentielles à trois variables qui ne peuvent être ni intégrées ni construites, il faut apprendre à déterminer le facteur qui rendra completes celles qui sont susceptibles d'intégration ou de construction; mais auparavant il est nécessaire de faire les remarques suivantes qui suivent de la différentiation des quantités.

On remarquera d'abord que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce même facteur à leurs différentielles.

On remarquera en ſecond lieu que ſi une fonction a un dénominateur, ſa différentielle aura auſſi un dénominateur qui ſera un multiple de celui de l'intégrale.

D'après ces obſervations, mettons au lieu de μ, $\frac{P}{Q}$, P & Q étant deux fonctions ſans diviſeurs, P ſera un facteur de la fonction φ cherchée, dont la différence eſt $\frac{PA}{Q}dx + \frac{PB}{Q}dy + \frac{PC}{Q}dz$, & Q contiendra le dénominateur de la même fonction φ.

J'imagine que la différentielle eſt diviſée par l'intégrale, P s'en ira du numérateur & Q ſe diviſera par le dénominateur. Il ne reſtera par conſéquent après ſa diviſion, pour le dénominateur commun à tous les termes, qu'une fonction R d'un degré de plus que celui de A, B, C: nous diſons d'un degré de plus, parce que la quantité $\frac{Adx+Bdy+Cdz}{R}$ qui vient par cette diviſion, eſt égale à $\frac{d\varphi}{\varphi}$, ou à la différence du logarithme de la fonction cherchée, & que par conſéquent elle doit être d'un degré au deſſous de l'unité.

Pour trouver R, on le prendra égal à la fonction poſitive, c'eſt-à-dire ſans diviſeurs, la plus générale d'un degré au deſſus de A, avec des coefficiens indéterminés; s'il y a des radicaux dans A, B, C, il faut auſſi qu'ils entrent dans R, en ſe combinant avec x, y, z, de toutes les manieres poſſibles.

On fera enſuite les trois équations ſuivantes:

$$\frac{RdA}{dy} - \frac{AdR}{dy} = \frac{RdB}{dx} - \frac{BdR}{dx},$$

$\frac{RdB}{dx}$

$$\frac{R\,dB}{dz} - \frac{B\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dy} - \frac{C\,dR}{dy},$$
$$\frac{R\,dA}{dz} - \frac{A\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dx} - \frac{C\,dR}{dx},$$

afin de déterminer par leurs ſecours les coefficiens indéterminés de la fonction R. Mais entre ces trois équations on choiſira les deux qui paroîtront donner moins de calcul, la troiſieme étant inutile. Car il eſt aiſé de voir que ſi l'on s'eſt aſſuré au moyen de l'équation $B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \&c.$ que l'équation $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ eſt poſſible, il arrivera que la fonction R qui convient à deux des trois équations précédentes conviendra auſſi à la troiſieme.

Après avoir déterminé par le ſecours de ces deux équations les coefficiens de R, & par conſéquent R même, on intégrera $\frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{R}$, par la méthode de l'article XXX. pour intégrer une différentielle qu'on ſait être exacte. Enſuite on égalera l'intégrale trouvée à une conſtante, & l'on aura l'intégrale de la propoſée.

XLI.

Application du Théorême aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux quantités & aux équations différentielles qui renferment quatre, cinq &c. variables.

Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du + E\,ds + \&c.$ dans laquelle A, B, C, D, E, &c. expriment des fonctions de x, y, z, u, s, & de conſtantes; pour que cette quantité faſſe une différentielle exacte, il faudra que deux des termes quelconques de cette quantité

faſſent toujours une différentielle complete, en ne regardant comme variables que les deux ſeules lettres dont les différentielles ſe trouvent dans ces deux termes. On aura donc autant d'équations comme $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. à vérifier, qu'il y a de manieres de combiner deux à deux les fonctions A, B, C, &c. Si ces équations ont lieu, la propoſée ſera intégrable; autrement elle ne le ſera pas. Dans le premier cas le procédé à ſuivre pour en trouver l'intégrale ſera le même à peu près que celui que nous avons pratiqué, (Art. xxx.) pour les différentielles à trois variables; il n'y aura de différence que dans la longueur du Calcul.

XLII.

Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables.

A l'égard des équations telles que $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds +$ &c. $= 0$ qui repréſente une équation quelconque compoſée de x, y, z, u, s, &c. avec leurs différentielles & des conſtantes; on verra d'abord ſi cette équation dans l'état où elle eſt propoſée, eſt une différentielle complete, & la maniere de s'en aſſurer ſera de vérifier autant d'équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. qu'il y a de façons poſſibles de combiner deux à deux les lettres A, B, C, D, E, &c. Si l'équation propoſée n'eſt pas une différentielle complete, il faut examiner ſi elle peut le devenir. Pour faire cet examen je prends à volonté trois termes de la propoſée, & les égalant à zéro, je vois s'ils forment une équation poſſible, en obſervant toutefois d'y regarder comme conſtantes toutes les lettres, excepté

Méthode pour s'aſſurer ſi elles peuvent devenir completes, lorſqu'elles ne le ſont pas.

Nombre d'équations à vérifier.

les trois dont les différentielles ſe trouvent dans ces trois termes. Donc en pratiquant ce qui a été dit (Art. XXXIV.) pour les équations à trois variables, on voit aiſément qu'on aura autant d'équations à vérifier comme $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, qu'il aura de manieres de combiner trois à trois les fonctions A, B, C, D, E, &c. Lorſque toutes les équations de la même nature que la précédente, venues par la combinaiſon des termes $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. pris trois à trois, auront en même temps lieu, on pourra rendre l'équation propoſée une différentielle complete.

XLIII.

REMARQUE. On peut cependant abreger le nombre de ces équations à vérifier, parce que quelques-unes ſuivent néceſſairement des autres. Pour le prouver je prends l'équation à quatre variables $Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$. Cette équation par la combinaiſon des quatre lettres A, B, C, D priſes trois à trois me donnent les quatre équations ſuivantes :

Ce nombre peut quelquefois ſe diminuer.

Preuve ſur une équation à quatre variables.

1°. $Adx + Bdy + Cdz = 0$
2°. $Adx + Bdy + Ddu = 0$
3°. $Adx + Cdz + Ddu = 0$
4°. $Bdy + Cdz + Ddu = 0$

De la premiere équation on tire en ſuivant le calcul de l'Article XXXIV. $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; la ſeconde nous donne en ſuivant le même

calcul $\frac{BdD}{dx} - \frac{DdB}{dx} + \frac{AdB}{du} - \frac{BdA}{du} - \frac{AdD}{dy} + \frac{DdA}{dy} = 0$; la troiſieme nous donne $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{AdC}{du} - \frac{CdA}{du} - \frac{AdD}{dz} + \frac{DdA}{dz} = 0$; & enfin on tire de la quatrieme, $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{BdC}{du} - \frac{CdB}{du} - \frac{BdD}{dz} + \frac{DdB}{dz} = 0$.

Or on voit aiſément que ſi on prend trois de ces équations à volonté, la quatrieme s'enſuit néceſſairement; donc pour s'aſſurer ſi une équation à quatre variables peut devenir complete, il ſuffira de vérifier trois des équations de condition qu'elle donne.

XLIV.

COROLLAIRE. En faiſant le même raiſonnement ſur les équations à cinq variables, on verra que des dix équations de condition que donne la combinaiſon des fonctions A, B, C, D, E, priſes trois à trois, ſix ſuffiront pour déterminer ſi l'intégration ou la conſtruction eſt poſſible. De même ſi la propoſée avoit ſix variables, telles que la ſuivante $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds + Fdr = 0$, des vingt équations de condition que donne la combinaiſon des ſix lettres A, B, C, D, E, F, priſes trois à trois, il ſuffira d'en vérifier dix.

Donc en général le nombre des variables contenues dans une équation différentielle étant m, le nombre d'équations néceſſaires à vérifier pour ſavoir ſi la propoſée peut devenir complete, ſera ce que le nombre $m - 1$ peut donner de combinaiſons deux à deux; c'eſt-à-dire $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$.

XLV.

Lorſque par les procédés que nous venons d'indiquer on aura reconnu que les équations à trois, quatre, cinq, &c. variables peuvent être rendues completes, il faudra chercher le facteur qui doit pour cela multiplier tous les termes de l'équation. Nous ne détaillerons pas ici la méthode de trouver ce facteur; le lecteur qui ſera curieux de la connoître la trouvera dans le mémoire que nous avons déja cité dans ce Chapitre.

XLVI.

Maintenant on eſt en état de s'aſſurer ſi une quantité ou une équation différentielle eſt intégrable ou non; & l'on voit que cette connoiſſance doit épargner beaucoup de peines ſouvent inutiles. Avant que de commencer le détail des méthodes particulieres, il eſt bon d'obſerver qu'il y a des équations différentielles qui ont une intégrale algébrique, d'autres qu'on ne peut intégrer algébriquement, mais dont on parvient à ſéparer les indéterminées. Nous allons d'abord examiner comment on conſtruit les équations dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées; enſuite nous traiterons des différentielles qui s'intégrent en les multipliant ou les diviſant par des fonctions de leurs indéterminées, ou en opérant ſur elles par les transformations enſeignées dans le ſecond Chapitre de la premiere Partie. De là nous détaillerons les méthodes différentes de ſéparer les indéterminées dans les équations différentielles.

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

XLVII.

Ce qu'il faut faire avant que de conſtruire l'équation.

LEMME. DAns une équation différentielle qu'on veut conſtruire, il faut d'abord mettre d'un côté les dx & de l'autre les dy; alors l'équation ſera de cette forme $Xdx = Ydy$ (X exprimant une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y). Quand les deux membres de cette équation ne ſont pas intégrables, alors on la conſtruit par les quadratures: nous allons donner la méthode qu'il faut ſuivre pour cela. Mais nous obſerverons auparavant de quelle maniere on trouve le nombre des dimenſions d'une quantité quelconque X, formée de x & de conſtantes. Par exemple, ax^3 eſt de quatre dimenſions, de même que $ax^3 + b^2x^2$; $\sqrt{(x^4 + c^3x)}$ eſt de deux; $\frac{ax^3 + b^2x^2 + g^2\sqrt{(x^4 + c^3x)}}{\sqrt{(ex + ff)}}$ eſt de trois, parce que le numérateur eſt de quatre & le dénominateur de une; & ainſi de ſuite.

XLVIII.

Procédé pour faire la conſtruction.

PROBLEME. Conſtruire une équation différentielle dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

SOLUTION. Je prends le nombre des dimenſions de

X & de Y, nombre qui doit être le même. Si tous les termes n'avoient pas en apparence la même dimenſion, ils doivent être cenſés l'avoir, parce que ceux qui ont la plus petite dimenſion, doivent être cenſés multipliés par une puiſſance convenable d'une ligne conſtante, qu'on prend pour l'unité.

Soit le nombre des dimenſions repréſenté par n, je diviſe mon équation par a^n (a eſt une conſtante quelconque.) J'ai donc $\frac{Y\,dy}{a^n} = \frac{X\,dx}{a^n}$. Pour conſtruire cette équation, ſoient AP, AQ perpendiculaires l'une à l'autre, Figure 4. ſoit une courbe EK telle que . . . . . $AP = x$

$$PK = \frac{X}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . . $APKE = \int \frac{X\,dx}{a^{n-1}}$.

Soit encore la courbe TD, telle qu'on ait $AQ = y$

$$QT = \frac{Y}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . . $AQTD = \int \frac{Y\,dy}{a^{n-1}}$.

Maintenant ſuppoſons qu'on ait . . . $au = \int \frac{X\,dx}{a^{n-1}}$,

on en tirera . . . . . $u = \int \frac{X\,dx}{a^n}$,

enſuite on tracera une courbe GN telle que $PN = u$;

ſuppoſons de même que . . . . . $at = \int \frac{Y\,dy}{a^{n-1}}$,

on aura . . . . . $t = \int \frac{Y\,dy}{a^n}$;

& ſoit la courbe SO telle que . . . $SQ = t$.

Il faut donc que $t = u$.

Ayant pris $AH = QS$, on menera AI ſous un angle

de 45° ; puis tirant HI parallele à AQ, du point I on menera IN parallele à AP qui déterminera le point N, tel que $PN(u) = QS(t)$, & par conſéquent $\int \frac{X\,dx}{a^n} = \int \frac{Y\,dy}{a^n}$. Donc ſi on prolonge SQ & PN juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en M, le point M ſera à la courbe qu'exprime l'équation propoſée.

XLIX.

REMARQUE 1. Quelquefois il eſt néceſſaire d'ajouter une conſtante ; c'eſt la nature du Problême qui doit ſervir à la déterminer : on n'ajoutera cette conſtante que d'un ſeul côté ; car il ſeroit inutile d'en ajouter des deux côtés à la fois, puiſque l'on pourroit regarder ces deux conſtantes comme n'en faiſant qu'une.

L.

REMARQUE 2. Si l'un des deux membres de l'équation différentielle propoſée étoit intégrable, alors ce membre dépendroit d'une courbe quarrable, & l'autre membre ſe conſtruiroit de la maniere que nous venons d'expoſer. Par exemple, ſi l'on avoit l'équation $dx\sqrt{px} = Y\,dy$, (Y exprimant une fonction de y, telle que le ſecond membre ne ſoit pas intégrable algébriquement) l'intégration de cette équation donne $\frac{2x\sqrt{px}}{3} = \int Y\,dy$. On auroit le premier membre en traçant une parabole dont l'équation ſeroit $yy = px$, & l'autre membre ſe conſtruiroit comme dans le Problême.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

LI.

IL eſt aiſé de ſentir qu'en ſéparant les indéterminées dans une équation différentielle, on la réduit aux cas de la premiere Partie ; puiſqu'alors on peut regarder chaque membre de l'équation, comme une différentielle particuliere qui ne contient qu'une variable. C'eſt cette opération que nous allons maintenant pratiquer ; d'abord pour des équations différentielles aſſez ſimples ; nous paſſerons enſuite aux plus compoſées.

LII.

Exemples de cette ſéparation par les regles ordinaires de l'Algebre.

1°. Si on avoit des équations de la forme ſuivante $aaxdx + yyxdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$, qui équivaut à la ſuivante $(aa+yy).xdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$; on verroit au premier coup d'œil que les indéterminées s'y ſéparent par une ſimple diviſion : car on a $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+ff)}} = \frac{ydy}{aa+yy}$; dont l'intégrale eſt, comme on le ſait, $(xx+ff)^{\frac{1}{2}} = \int(aa+yy)^{\frac{1}{2}} + C$.

Premier exemple.

LIII.

Second exemple. De même l'équation $\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(a^3+y^3)}} = \frac{y\,dy}{\sqrt[4]{(b^4-x^4)}}$ devient par la ſeule multiplication $x\,dx\,.\,(b^4-x^4)^{\frac{1}{4}} = y\,dy\,.\,(a^3+y^3)^{\frac{2}{3}}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées, & que l'on conſtruira par la méthode enſeignée plus haut.

LIV.

Troiſieme exemple. Que j'aie $xx\,dx^2 + xy\,dx\,dy = aa\,dy^2$; je remarque que le premier membre de cette équation ſeroit un quarré, s'il y avoit de plus $\frac{yy\,dy^2}{4}$. J'ajoute donc de part & d'autre cette quantité, & l'équation devient $xx\,dx^2 + xy\,dx\,dy + \frac{yy\,dy^2}{4} = aa\,dy^2 + \frac{yy\,dy^2}{4}$. Je prends la racine quarrée, ce qui me donne $x\,dx + \frac{y\,dy}{2} = \pm\,dy \times \left\{\frac{yy}{4} + aa\right\}^{\frac{1}{2}}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. L'intégrale de cette équation eſt $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} \mp \int\left\{dy\sqrt{\left(\frac{yy}{4}+aa\right)}\right\} + C = 0$, dont la partie qui eſt ſous le ſigne $\int$ dépend de la quadrature d'une hyperbole équilatere par rapport à ſon ſecond axe, l'origine des coordonnées étant au centre de la courbe.

Il en eſt ainſi d'un grand nombre d'autres équations différentielles qu'il eſt inutile de détailler ici.

LV.

Exemples de cette même ſéparation par 2°. Pour ſéparer les indéterminées dans l'équation ſuivante $a\,dx = y\,dy - x\,dy$; on fera $y - x = z$, ou $y =$

$z+x$; $dy = dz+dx$. Après les ſubſtitutions, l'équation propoſée deviendra $a\,dx = z\,dz+z\,dx$; ou $a\,dx - z\,dx = z\,dz$. Donc en diviſant par $a-z$, on a $dx = \frac{z\,dz}{a-z}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées ; & qui a pour intégrale $x = a - z + l\,(a-z)^{-a} + C$. Remettant pour z ſa valeur $y-x$, on aura $x = a - y + x + l\,\frac{1}{(a-y+x)^a} + C$ pour l'intégrale cherchée. On verra d'ailleurs plus bas une méthode pour intégrer cette équation ſans transformation. Voyez le Chap. VII.

des transformations.

Premier exemple.

LVI.

Soit l'équation $aadx = x^2dy + 2xydy + yydy$; je fais $x+y = z$: j'en tire $dx+dy = dz$. La propoſée devient donc $aadz - aady = z^2dy$; c'eſt-à-dire $\frac{aadz}{zz+aa} = dy$: j'integre maintenant, & j'ai $y = \int \frac{aadz}{zz+aa}$; le ſecond membre dépendant (Art. CVII. de la Ire Partie,) de la quadrature du cercle.

Second exemple.

LVII.

Si la propoſée étoit $(x\,dy+y\,dx) \times (a^4 - xxyy)^{\frac{1}{2}} = \frac{x\,dx+y\,dy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, je remarque que dans le premier membre de cette équation $x\,dy+y\,dx$ eſt la différentielle de xy & que le quarré de cette intégrale ſe trouve dans la quantité ſous le ſigne. Je fais donc $xy = z$, & j'ai pour premier membre de ma transformée $dz.(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}}$ qui eſt tel que je le demande. Je vois de plus que dans le ſecond

Troiſieme exemple.

membre de l'équation le numérateur eſt la moitié de la différentielle de $xx+yy$, quantité qui ſe trouve ſous le ſigne au dénominateur : je ſuppoſe donc $\frac{xx+yy}{2}=t$; & ma transformée entiere eſt $dz.(a^4-zz)^{\frac{1}{2}}=\frac{dt}{\sqrt{2t}}$ dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. L'intégrale du premier membre dépend (Art. XCIV. premiere Partie) de la quadrature du cercle ; & celle du ſecond eſt $\sqrt{2t}$, comme on le ſait.

LVIII.

Quatrieme exemple.

Soit encore à intégrer l'équation $\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2}=dX$ (X eſt une fonction quelconque de x ou de y). Je fais $\frac{y}{x}=\frac{u}{a}$, ce qui me donne la transformée ſuivante $\frac{2xxdu}{a.(x-y)^2}=dX$. Je diviſe le numérateur & le dénominateur du premier membre par xx ; j'ai $\frac{2adu}{aa-2au+uu}=dX$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. Pour l'intégrer je ſuppoſe $a-u=t$; la transformée que donne cette ſubſtitution eſt $-\frac{2adt}{tt}=dX$ dont l'intégrale eſt $\frac{2a}{t}=X$; & en remettant pour t & u leurs valeurs, l'intégrale cherchée eſt $\frac{2x}{x-y}-X+C=0$.

LIX.

Si au lieu de ſuppoſer $\frac{y}{x}=\frac{u}{a}$, on ſuppoſe $\frac{x}{y}=\frac{u}{a}$, on aura, après les ſubſtitutions différentes, $\frac{-2adu}{uu-2au+aa}=dX$. Pour intégrer cette équation, ſoit $u-a=t$; on aura pour transformée $-\frac{2adt}{tt}=dX$, laquelle a pour intégrale $\frac{2a}{t}+C-X=0$; & remettant pour t ſa valeur

en u, & pour u ſa valeur $\frac{y}{x}$, on a $\frac{2y}{x-y} - X + C = 0$, intégrale différente de la précédente.

LX.

On trouveroit encore en faiſant $\frac{x+y}{x-y} = z$, que $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dX$ a pour intégrale $\frac{x+y}{x-y} - X + C = 0$: on en trouveroit même, en faiſant d'autres transformations, une infinité d'autres ; ce qui ne doit faire aucune difficulté. Car l'intégrale générale étant $\frac{2x}{x-y} - X + C = 0$, ou $\frac{2x + Cx - Cy}{x-y} - X = 0$, on trouvera autant d'intégrales particulieres qu'on donnera de valeurs différentes à C. Par exemple, ſi $C = 0$, on aura $\frac{2x}{x-y} - X = 0$, qui eſt celle que nous avons trouvée d'abord : ſi $C = -2$, on aura $\frac{2y}{x-y} - X = 0$, & c'eſt la ſeconde que nous avons eue : ſi $C = -1$, on aura $\frac{x+y}{x-y} - X = 0$, & ainſi du reſte. Nous ſommes entrés dans ce détail ſur cet exemple, afin que le lecteur ne ſoit point embarraſſé dans les cas pareils.

LXI.

Cinquieme exemple.

Soit encore propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $Y = \frac{y^2dx - xydy}{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}$, dans laquelle Y repréſente une fonction quelconque de y & de conſtantes : j'aurai $\frac{Y}{y} = \frac{ydx - xdy}{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; & en retournant l'équation $\frac{y}{Y} = \frac{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ydx - xdy}$. Donc en quarrant les deux membres, j'aurai $\frac{y^2}{Y^2} = \frac{y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2}{y^2dx^2 - 2xydydx + x^2dy^2}$

$= 1 + \frac{y^2dy^2 - x^2dy^2}{y^2dx^2 - 2xydydx + x^2dy^2}$. Donc $\left(\frac{y^2}{Y^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy\sqrt{(y^2-x^2)}}{ydx - xdy}$; ou bien $\frac{Y}{(y^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydx - xdy}{dy\sqrt{(y^2-x^2)}}$. Soit maintenant $\frac{x}{y} = z$, on aura $ydx - xdy = yydz$; & après les ſubſtitutions la transformée ſera $\frac{Y}{(y^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydz}{dy\sqrt{(1-zz)}}$. Donc enfin $\frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2-Y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$.

Paſſons maintenant à des cas plus généraux dans leſquels les indéterminées ſe ſéparent encore par de ſimples transformations.

LXII.

Cas plus généraux que les précédens qui s'integrent de même.

Premiere formule.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans la formule générale $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^\alpha} = gqdx$, p & q étant des fonctions de x telles que $q = \frac{dp}{dx}$.

SOLUTION. Soit $(cy^n+p)^\alpha = z$; on en tire $cy^n + p = z^{\frac{1}{\alpha}}$, & en différentiant & mettant pour dp ſa valeur qdx, on aura $y^{n-1}dy = \frac{1}{c\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz - qdx$.

Donc $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^\alpha} = \frac{\frac{a}{c\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz - aqdx}{b+z} = gqdx$.

Donc enfin $\frac{az^{\frac{1}{\alpha}-1}dz}{\alpha bcgn + \alpha cgnz + a\alpha} = qdx$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

LXIII.

Application à un exemple.

Soit dans la formule précédente . . . . . $b = 2g$

$a = f^2$

$n = 1$

$p = bx$

$q = b$

$\alpha = \frac{1}{2}$,

l'équation ſera $\frac{f^2 dy}{2g+(cy+bx)^{\frac{1}{2}}} = bg\,dx$. Je ferai donc $(cy+bx)^{\frac{1}{2}} = z$; j'aurai $y = \frac{zz-bx}{c}$; $dy = \frac{2z\,dz-b\,dx}{c}$; & pour transformée, l'équation ſuivante $\frac{2f^2 z\,dz - bf^2\,dx}{c.(2g+z)} = bg\,dx$; ou $2f^2 z\,dz - bf^2\,dx = 2bcg^2\,dx + bcgz\,dx$. Donc $\frac{2f^2 z\,dz}{2cg^2+f^2+cgz} = b\,dx$; équation réduite en fraction rationelle.

LXIV.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{y^\alpha dx}{(bx^t+ay^n x^r)^m} = cx^q dy$; a, b, c, étant des conſtantes. Seconde formule plus générale.

SOLUTION. Soit $(bx^t+ay^n x^r)^m = zx^{mt}$; on aura la transformée ſuivante $\frac{(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r}-bx^{t-r})^{\frac{\alpha}{n}}dx}{a^{\frac{\alpha}{n}}zx^{mt}} = \frac{cx^q}{na^{\frac{1}{n}}} \times (z^{\frac{1}{m}}x^{t-r}-bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1} \times \left\{\frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + (t-r)\,z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx - (t-r)\,bx^{t-r-1}dx\right\}$, ou bien, en diviſant par $(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r}-bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1}$, $a^{\frac{1}{n}}mnx^{\frac{\alpha t}{n}-\frac{\alpha r}{n}+t-r-\frac{t}{n}+\frac{r}{n}}.(z^{\frac{1}{m}}-b)^{\frac{\alpha}{n}+1-\frac{1}{n}}dx = a^{\frac{\alpha}{n}}cx^{q+mt+t-r-1+1}z^{\frac{1}{m}}dz + (t-r)x$

$a^{\frac{\alpha}{n}} m z^{\frac{1}{m}+1} x^{q+mt+t-r-1} dx - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bmzx^{q+mt+t-r-1} dx.$

Or il eſt évident que ſi dans cette équation $\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} - \frac{t}{n} + \frac{r}{n} = q + mt - 1$, les indéterminées ſe ſépareront; car alors on aura $\frac{mdx}{x} = \frac{a^{\frac{\alpha}{n}} c z^{\frac{1}{m}} dz}{a^{\frac{1}{n}} n.(z^m - b)^{\frac{k}{n}-1} - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} z^{\frac{1}{m}+1} + (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bz}$: donc les indéterminées ſe ſépareront dans la propoſée toutes les fois qu'on aura $\alpha = \frac{nq+nmt-n+t-r}{t-r}$; ou bien $q = \frac{\alpha t - \alpha r - mnt + n - t + r}{n}$.

LXV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule . . . . . $\alpha = 2$
$t = 2$
$n = 1$
$r = 1$
$m = \frac{1}{2}$

on aura l'équation ſuivante $\frac{hy^2 dx}{(bbxx+gxy)^{\frac{1}{2}}} = xdy$. Je fais $(bbxx+gxy)^{\frac{1}{2}} = xz$; ce qui me donne la transformée ſuivante $\frac{hdx}{g^2} \cdot \frac{(z^2x-bbx)^2}{zx} = \frac{x}{g} \times (2xzdz - bbdx + z^2dx)$, & après la réduction on aura $hdx \times (z^4 - 2b^2z^2 + b^4) = 2gxz^2dz - bg^2zdx + gz^3dx$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{2gz^2dz}{hz^4 - 2kb^2z^2 + hb^4 - gz^3 + b^2gz}$.

Il en ſera de même pour beaucoup d'autres équations particulieres. Je paſſe maintenant à pluſieurs cas généraux dans leſquels les indéterminées ſe ſéparent par des méthodes qui leur ſont propres.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI.

DÉFINITION. ON appelle *équations homogenes* celles dans leſquelles la ſomme des dimenſions des x & des y, ou ſéparées, ou priſes enſemble, eſt la même dans tous les termes de l'équation. Telles ſont les ſuivantes, $xxdy + gyydx = fz^2du + au^2dz$, ou bien $xydx + byydx = 'gx^2dy + hxydy$. Telle eſt encore la ſuivante $dx\,(x\sqrt{x^4+y^4} + gy^2\sqrt[3]{xy^3+x^3}) = dy\,\{ax^3 + by^2x + gy^2\sqrt{(xx+yy)}\}$ &c. Cela poſé.

Ce que c'eſt qu'une équation *homogene*.

LXVII.

PROBLEME. Séparer les indéterminées dans les équations homogenes, à deux variables.

Solution générale du Problême.

SOLUTION. Soit miſe l'équation ſous cette forme $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$, p exprimant le numérateur du ſecond membre & q le dénominateur. Il eſt évident 1°. qu'en faiſant $x = yz$, on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z$. 2°. Qu'en ſubſtituant pour x ſa valeur yz dans p & dans q, y ſe trouvera à la même dimenſion dans tous les termes de p & dans ceux de q; par exemple, ſi $\frac{p}{q} = \frac{gx^2+hxy}{xy+byy}$; mettant pour x

ſa valeur yz on aura $\frac{gy^3z^3+hzy^3}{zy^3+by^3}$, fraction dans laquelle y a la même dimenſion dans tous les termes du numérateur & du dénominateur. Donc on pourra faire diſparoître de l'un & de l'autre, y; & $\frac{p}{q}$ ſe réduira à une quantité Z qui ne contiendra que z & des conſtantes. Donc on aura $\frac{ydz}{dy}+z=Z$, ou bien $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{Z-z}$, équation dans laquelle tout eſt ſéparé.

LXVIII.

Application à un exemple.

Soit à intégrer l'équation homogene $xdx\sqrt{(x^4+y^4)}+gy^2dx\sqrt[3]{(xy^2+x^3)}=ax^2dy+by^2xdy+qy^2dy\sqrt{x^2+y^2}$; je la mets ſous la forme ſuivante, $\frac{dx}{dy}=\frac{ax^2+by^2x+qy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{(x^4+y^4)}+gy^2\sqrt[3]{xy^2+x^3}}$, je fais $x=yz$; j'aurai par conſéquent en ſubſtituant dans cette équation pour x & dx leurs valeurs $\frac{ydz}{dy}+z=\frac{az^2+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{z^4+1}+g\sqrt[3]{z+z^3}}$, ou bien $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\frac{az^2+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{(z^4+1)}+g\sqrt[3]{(z+z^3)}}-z}$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

LXIX.

Cette regle s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puiſſance qu'y ſoient élevées les dx & les dy.

REMARQUE 1. Si dans l'équation homogene les dx & les dy étoient élevées à une puiſſance au-deſſus du premier dégré, on ſuivroit la même regle pour ſéparer les indéterminées.

Soit, par exemple, $xxdy^2+xydx^2=yydx^2$; on

donnera à cette équation la forme suivante, $dy^2 = dx^2\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}\right)$; donc $dy = \pm dx\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$. Soit donc $\frac{y}{x} = \frac{z}{a}$, on en tire $ady = xdz + zdx$; & aussi $ady = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc $xdz + zdx = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc enfin $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z - \sqrt{(zz - az)}}$.

LXX.

Que l'équation proposée soit $x^2dy^2 + xydxdy = x^2dx^2$, on remarquera que le premier membre seroit un quarré, s'il contenoit de plus $\frac{yydx^2}{4}$. J'ajoute donc ce terme de part & d'autre, & après avoir extrait la racine quarrée, la proposée devient $xdy + \frac{1}{2}ydx = \pm dx\sqrt{(xx + \frac{yy}{4})}$, équation qui est dans le cas de notre Problême, & qui devient par conséquent intégrable ou constructible par la méthode précédente.

LXXI.

Cette derniere méthode n'est applicable qu'aux équations dans lesquelles dy^2 ou dx^2 ne montent qu'au second degré, & dans lesquelles par conséquent on peut trouver la valeur de $\frac{dy}{dx}$. On trouvera plus bas (Art. CLIV.) une méthode pour les cas plus composés.

LXXII.

REMARQUE 2. La méthode que nous venons d'exposer pour les équations homogenes à deux changeantes

Elle s'étend aussi aux équations homogenes qui

contiennent plus de deux variables, en y faisant toutesfois quelque changement.

s'étendra aussi en y faisant quelques additions aux équations homogenes à trois ou à tant de variables qu'on voudra, pourvu que ces équations ne renferment point de constantes.

LXXIII.

Exemple général.

PROBLEME. Intégrer l'équation générale $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, X, Y, Z représentent des fonctions homogenes & sans constantes de x, y, z. La méthode seroit la même si l'on avoit 4, 5 ou un plus grand nombre de variables.

SOLUTION. Je fais $y = xu$, & $z = xt$. On voit clairement qu'en substituant pour y & pour z leurs valeurs, X qui contient des x, des y & des z sans constantes, se changera en une nouvelle fonction composée de x élevée à une puissance du degré de la fonction X, & multipliée par une fonction de u & de t. De même la fonction Y sera changée en une nouvelle composée de x élevée encore à la même puissance, & multipliée par une autre fonction de u & de t; & ainsi de Z. Supposant donc que m représente le degré des fonctions X, Y, Z, & que F, G, H soient des fonctions différentes de u & de t, substituons pour X, $x^m F$, pour Y, $x^m G$, & pour Z, $x^m H$; mettons aussi pour dy sa valeur $xdu + udx$, & pour dz sa valeur $xdt + tdx$, il est évident qu'on aura la transformée suivante $x^m dx.(F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, ou en divisant tous les termes par $x^{m+1}.(F + Gu + Ht)$, on a $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$;

Or dans l'équation mise sous cette forme les x sont séparées des u & des t; car les fonctions F, G, H ne contiennent point de x. Il ne s'agit donc que de savoir (Chap. II.) si $\frac{G\,du + H\,dt}{F+Gu+Ht}$ est une différentielle complete, & de l'intégrer ensuite.

LXXIV.

Soit dans la formule précédente . . . . $X = xy^2z^3$ Exemple particulier.
$Y = zx^2y^3$
$Z = y^3x^2z^2$

on aura . . . . . $m = 6$

& l'équation à intégrer sera $y^2z^3x\,dx + zx^2y^3\,dy + y^2x^2z^2\,dz = 0$. Je fais $y = xu$ & $z = xt$, on aura $x^6t^3u^2\,dx + x^6tu^3\,dy + x^6t^2u^2\,dz = 0$, dans laquelle x est, comme on voit, élevée dans chaque terme au même degré que les fonctions X, Y, Z. Maintenant substituons pour dy & dz leurs valeurs, on aura la transformée suivante $(2u^2t^3 + u^4t).dx + xtu^3\,du + xu^2t^2\,dt = 0$, ou enfin $\frac{dx}{x} + \frac{u\,du + t\,dt}{2u + 2tt} = 0$.

LXXV.

Après avoir exposé cette méthode de séparer les indéterminées dans les équations homogenes, nous allons détailler plusieurs moyens de rendre homogenes des équations qui ne l'étoient pas.

CHAPITRE VI.

Méthodes pour rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas.

LXXVI.

Elles ſont au nombre de deux.

NOus allons ici expoſer deux méthodes qui ſervent à rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas. La premiere conſiſte à ſe ſervir de ſubſtitutions convenables, & on ne peut lui donner aucune forme générale ; ce ne ſera que par des exemples qu'on en montrera les uſages. La ſeconde conſiſte à changer les expoſants de la propoſée, de telle ſorte qu'on puiſſe déterminer dans quels cas & avec quelles ſubſtitutions on la rendra homogene. Ces deux méthodes rendront une infinité de différentielles ſuſceptibles de la ſéparation des indéterminées.

LXXVII.

Exemples de la premiere méthode.

Premier exemple.

Soit propoſée l'équation $dx\sqrt{(aaxx+az^3)} = zzdz$ qu'on voit bien n'être pas homogene. Je fais $z^3 = ayy$, ce qui me donne la transformée ſuivante, $dx\sqrt{(aaxx+aayy)} = \frac{2aydy}{3}$ qui eſt homogene.

LXXVIII.

On auroit encore pu rendre cette équation homogene

d'une autre maniere, en ſuppoſant $\sqrt{(aaxx+az^3)} = ay$, car alors on a tout de ſuite $aydx = \frac{2aydy}{3} - \frac{2axdx}{3}$, équation qui eſt homogene.

LXXIX.

Soit maintenant à intégrer l'équation ſuivante $z^3dz + \frac{z^3dx}{\sqrt{(a+x)}} = dx$: je ferai $\sqrt{(a+x)} = t$; donc $a+x = tt$, & $z^3dz + 2zzdt = 2tdt$. Soit maintenant $zz = yy$, j'aurai en ſubſtituant $\frac{ydy}{z} + 2ydt = 2tdt$, équation qui eſt homogene. Second exemple.

LXXX.

S'il s'agiſſoit de rendre homogenes les équations ſuivantes, $(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.)\,dx + (lx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.)\,dy = 0$, ou bien $(ay + bxy^2 + ex^2y^3 + \&c.)\,dx + (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.)\,dy = 0$, équations dans leſquelles la ſomme des expoſans eſt en progreſſion arithmétique, la ſubſtitution qu'il faudroit faire ſeroit celle-ci, $y = \frac{1}{z}$. Car il nous vient après l'avoir faite, $(a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{zz} + \frac{ex^3}{z^3} + \&c.)\,dx - (lx^2 + \frac{mx^3}{z} + \frac{nx^4}{zz} + \&c.)\,\frac{dz}{zz} = 0$, & $\left(\frac{a}{z} + \frac{bx}{zz} + \frac{cx^2}{z^3} + \&c.\right)dx - (lx + \frac{mx^2}{z} + \frac{nx^3}{zz} + \&c.)\,.\,\frac{dz}{zz} = 0$, équations qu'on voit bien être homogenes. Troiſieme exemple.

LXXXI.

Et en général ſi on avoit à intégrer l'équation ſuivante, $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + \&c.)\,dx + (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1}z^{2\tau-1}$

$+ px^{\pi-1}z^{3\tau-1} +$ &c.) $dz = 0$, on rendroit cette équation homogene en faiſant $z = y^{\frac{1}{\tau}}$.

LXXXII.

Je paſſe à la ſeconde méthode.

Expoſition de la ſeconde méthode.

Soit l'équation générale compoſée de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, qui peut ſervir de formule, & dans laquelle les expoſans peuvent être poſitifs ou négatifs, entiers ou fractionaires. Si $n+m$ étoit $= q+p = r+s$, l'équation alors ſeroit homogene. Ainſi nous devons ſuppoſer qu'on n'a pas les égalités précédentes. Soit dans cette hypotheſe $y = z^t$, on a $dy = tz^{t-1}dz$, $y^s = z^{st}$ &c. & après les ſubſtitutions on aura la transformée $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + ctx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Mais pour que cette équation fût homogene, on devroit avoir $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$. De la premiere égalité on tire $t = \frac{p-m}{n-q}$, laquelle valeur ſubſtituée dans l'équation $qt + p = r + st + t - 1$, ou $(s - q + 1)t = p - r + 1$, l'a fait devenir $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$. Cette derniere égalité exprime les conditions que doivent avoir entre eux les expoſants de la propoſée, pour qu'on la puiſſe rendre homogene. La ſubſtitution qu'il faudra faire dans ce cas eſt $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Premiere formule pour les équations à trois termes.

Si au lieu de ſuppoſer $y = z^t$, on eût ſuppoſé $x = z^t$, on auroit trouvé le même réſultat pour la condition entre

les

les expoſants : la ſeule différence, c'eſt qu'alors on auroit $t = \frac{n-q}{p-m}$, ce qui rendroit la ſubſtitution à faire $x = z^{\frac{n-q}{t-m}}$.

LXXXIII.

Il peut arriver que la ſubſtitution de $y = z^{\frac{t-m}{n-q}}$ ſoit impoſſible; ce qui arrive dans le cas où $p = m$, ou $n = q$: mais alors on pourra ſéparer les indéterminées dans la propoſée ſans avoir recours à aucune préparation : car dans le cas où $p = m$, elle devient $x^{m-r}dx = -\frac{cy^s dy}{ay^n + by^q}$, ou $x^{p-r}dx = -\frac{cy^s dy}{ay^n + by^q}$; & dans celui de $n = q$, on a $ax^{m-r}dx + bx^{p-r}dx = -cy^{s-n}dy$, ou $-cy^{s-q}dy$.

LXXXIV.

Si dans la formule $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, outre la ſuppoſition de $y = z^t$ on ſuppoſe encore $x = u^\alpha$; après les ſubſtitutions ordinaires, on trouvera $a\alpha z^{nt} u^{\alpha m + \alpha - 1} du + b\alpha z^{qt} u^{\alpha p + \alpha - 1} du + ctu^{\alpha r} z^{st+t-1} dz = 0$; comparant enſemble les expoſans du premier & du ſecond terme, on a $nt + \alpha m + \alpha - 1 = qt + \alpha p + \alpha - 1$, d'où l'on tire $t = \alpha \cdot \left\{\frac{p-m}{n-q}\right\}$. L'équation entre les expoſans du ſecond & du troiſieme terme nous donne $t \cdot (s - q + 1) = \alpha(p - r + 1)$, & mettant pour t ſa valeur tirée de la premiere équation entre les expoſants, on a $\alpha \cdot (p-m) \cdot (s-q+1) = \alpha \cdot (n-q) \cdot (p-r+1)$, équation qui exprime, comme ci-deſſus, la condition que doivent avoir les expoſants de la formule pour l'homogé-

néité : mais dans cette équation la lettre α ſe détruit dans tous les termes ; donc la ſeconde ſuppoſition de $x = u^{\alpha}$ étoit inutile.

LXXXV.

Application de la formule à une équation particuliere.

Soit propoſée l'équation $ay^3 x\,dx + byy x^{\frac{3}{2}} - cx\,dy = 0$, je compare cette équation avec la formule précédente : cette comparaiſon me donne . . . . . $n = 3$

$m = 1$

$q = 2$

$p = \frac{1}{2}$

$r = 1$

$s = 0$

Dans ce cas l'équation de condition $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$ devient $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, ce qui eſt conſtant ; donc la propoſée peut être rendue homogene. Je fais donc . . . . . $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$

$dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$

$y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$

$yy = z^{-1}$

& après la transformation je trouve $\frac{a x dx}{z\sqrt{z}} + \frac{b dx \sqrt{x}}{z} + \frac{c x dz}{2 z \sqrt{z}} = 0$, équation qui eſt homogene, comme on le voit au premier coup d'œil.

LXXXVI.

Seconde formule contenant les équations à quatre termes.

Si le nombre des termes de l'équation eſt plus grand que trois, les conditions que doivent avoir les expoſants

des indéterminées augmentent à proportion. Soit, par exemple, l'équation ſuivante de quatre termes qui peut ſervir de formule $ax^m y^n dx + bx^q y^p dx + cx^r y^s dy + fx^p y^u dy = 0$, je fais $y = z^t$, d'où je tire $dy = tz^{t-1} dz$

$$y^n = z^{nt}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^p = z^{pt}$$
$$y^s = z^{st}$$
$$y^u = z^{tu}$$

Subſtituant ces valeurs on a $ax^m z^{nt} dx + bx^q z^{pt} dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + ftx^p z^{tu+t-1} dz = 0$. On doit donc avoir, 1°. $nt + m = pt + q$, d'où l'on tire $t = \frac{q-m}{n-p}$. On doit avoir 2°. $r + st + t - 1 = pt + q$, ou $st - pt + t = q - r + 1$, & mettant pour t ſa valeur, on aura $(s - p + 1).(q - m) = (q - r + 1).(n - p)$; premiere condition que doivent avoir les expoſants de la propoſée. La comparaiſon du ſecond & du quatrieme terme donne $s + tu + t - 1 = pt + q$, ou $tu - pt + t = q - s + 1$, & mettant pour t ſa valeur trouvée précédemment, on a $(u - p + 1).(q - m) = (q - s + 1).(n - p)$, équation qui donne une ſeconde condition que doivent encore avoir entre eux les expoſants de la formule. S'ils ont ces deux conditions, alors elle pourra devenir homogene, & la ſubſtitution à faire eſt $y = z^{\frac{q-m}{n-p}}$.

Si les équations propoſées ont cinq termes, alors leurs expoſants devront avoir entre eux trois conditions, & ainſi de ſuite.

LXXXVII.

Application de la formule à quelques équations particulieres.

Si on propoſe de rendre homogene l'équation $dx\sqrt{x} + dx\sqrt[3]{y^4} + ydy\sqrt[4]{x^3} - y^3dy = 0$; pour voir ſi elle eſt ſuſceptible de l'homogénéité, je la compare avec la formule, & j'ai . . . . . $m = \frac{1}{2}$

Premiere équation.

$$n = 0$$
$$q = 0$$
$$p = \frac{4}{3}$$
$$r = \frac{3}{4}$$
$$s = 1$$
$$\rho = 0$$
$$u = 3.$$

Donc l'équation $(s-q+1).(q-m) = (q-r+1).(n-p)$ qui eſt la premiere qui doit ſe trouver entre les expoſants eſt ici $(1-\frac{4}{3}+1).-\frac{1}{2} = (-\frac{3}{4}+1).-\frac{4}{3}$, ou $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, ce qui montre que les expoſants de notre équation ont déja la premiere condition requiſe. La ſeconde équation qui doit ſe trouver eſt celle-ci $(u-p+1).(q-m) = (q-\rho+1).(n-p)$: elle devient ici $(3-\frac{4}{3}+1)\times-\frac{1}{2} = 1\times-\frac{4}{3}$; ou $-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$; donc les expoſants de la propoſée ont les conditions requiſes pour qu'elle puiſſe être rendue homogene. Je fais donc . . . . . $y = z^{\frac{q-m}{n-p}} = z^{\frac{3}{8}}$

$$dy = \tfrac{3}{8}z^{-\frac{5}{8}}dz$$
$$y^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$y^3 = z^{\frac{9}{8}},$$

& après les ſubſtitutions on a la transformée $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{z} + \frac{3dz\sqrt[4]{x^3}}{8\sqrt[4]{z}} = \frac{3dz\sqrt{z}}{8}$; équation qu'on voit tout de ſuite être homogene.

LXXXVIII.

Soit encore l'équation $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$; cherchons ſi elle peut devenir homogene en lui appliquant tout de ſuite la méthode qui nous a fait découvrir les cas d'homogénéité de la formule. Soit $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, on trouve pour transformée $az^{2t}xxdx + bdx + cz^txdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Mais on doit avoir $2t + 2 = 1 + t$, ce qui donne $t = -1$; cette valeur de t étant miſe à ſa place dans la transformée, elle devient $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4dz}{z^4} = 0$, qui eſt homogene. Donc la ſubſtitution qu'il faut faire ici eſt $y = \frac{1}{z}$.

LXXXIX.

Telles ſont les méthodes les plus générales pour rendre homogenes les équations qui ne le ſont pas; il y a encore un cas qui, quoique particulier, ne laiſſe pas d'être aſſez étendu, & qu'on peut ramener à l'homogénéité; c'eſt celui dans lequel les indéterminées & leurs différences ne paſſent pas la premiere dimenſion. Nous allons l'examiner dans le Problême ſuivant.

X C.

Cas particulier assez étendu qui se ramene à l'homogénéité.

PROBLEME. Rendre homogene l'équation $axdx + bydx + cdx + gxdy + fydy + hdy = 0$.

SOLUTION. Soit cette équation mise sous la forme suivante $(ax + by + c)\,dx + (gx + fy + h)\,dy = 0$, je remarque d'abord que si b étoit $= g$, b & g étant de même signe, l'équation s'intégreroit tout de suite, puisqu'alors elle deviendroit $\pm b\,.\,(ydx + xdy) = -axdx - fydy - cdx - hdy$, dont l'intégrale est $\pm bxy + \frac{axx}{2} + \frac{fyy}{2} + cx + hy + C = 0$: mais nous supposons que b n'est pas égal à g. Cela posé, je fais $x = mz + nu + r$

Ce cas est représenté par l'équation $(ax+by+c)\,.\,dx + (gx + fy + h)\,dy$.

& . . . . . $y = pz + ku + s$

substituant, il me vient

$$\left\{\begin{matrix} amz + anu + ar \\ + bpz + bku + bs \\ + c \end{matrix}\right\}\,.\,(mdz + ndu) \mp \left\{\begin{matrix} gmz + gnu + gr \\ + fpz + fku + fs \\ + k \end{matrix}\right\}\,.\,(pdz + kdu) = 0$$

équation qui me fait voir que j'aurois pu faire une substitution plus simple. Effectivement, je suppose $x = z + r$

$y = u + s$

(z & u sont deux nouvelles indéterminées, s & r sont deux constantes), j'ai . . . . . $dx = dz$

& . . . . . $dy = du$

substituant ces valeurs dans l'équation, elle se change en

$$\left\{\begin{matrix} az+ar \\ +bu+bs \\ +c \end{matrix}\right\} dz + \left\{\begin{matrix} gz+gr \\ +fu+fs \\ +h \end{matrix}\right\} du = 0.$$

Or je remarque que cette équation seroit homogene, si les termes $ar+bs+c$ & $gr+fs+h$ étoient égaux à zéro; cette supposition réduisant la transformée à l'équation suivante $(az+bu)\,dz+(gz+fu).du=0$. Il ne s'agit plus que de tirer les valeurs de r & de s relatives à cette supposition. Or ces valeurs sont $s=\frac{ah-cg}{gb-af}$ & . . . . . $r=\frac{cf-bh}{gb-af}$. Donc les substitutions qu'il faut faire dans le cas présent sont. . . . . $x=z+\frac{cf-bh}{gb-af}$ & . . . . . $y=u+\frac{ah-cg}{gb-af}$. *C. Q. F. T.*

XCI.

REMARQUE 1. S'il se trouvoit que cf fût $=bh$, ou $ah=cg$, l'une ou l'autre des deux constantes r ou s s'évanouiroit, ce qui marqueroit que dans ce cas on n'a besoin que d'une substitution pour x, si $s=0$; pour y, si $r=0$. Soit, par exemple, $cf=bh$ laissant x & sa différence, je me contenterai de supposer $y=x+s$, & je ferai le reste de l'opération comme dans l'article précédent.

Observations importantes sur l'équation précédente.

XCII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit en même temps $cf=bh$ & $ah=cg$, alors les deux constantes r & s s'évanouiroient

auquel cas la méthode pour parvenir à l'homogénéité ſeroit différente. Voici comment il faudroit s'y prendre dans ce cas. Puiſque $cf = bh$, & $ah = cg$, on a $g = \frac{ah}{c}$ & $f = \frac{bh}{c}$: donc l'équation propoſée $(ax + by + c)\,dx + (gx + fy + h)\,dy = 0$, devient $(ax + by + c)\,dx + \left(\frac{ahx}{c} + \frac{bhy}{c} + h\right)\,dy = 0$, ou bien $(ax + by + c)\,dx + (ax + by + c).\frac{h\,dy}{c} = 0$, ou enfin $(ax + by + c) \times \left(dx + \frac{h\,dy}{c}\right) = 0$; ce qui donne $ax + by + c = 0$ ou . . . . . $x + \frac{hy}{c} + A = 0$ (A eſt une conſtante) : or ces deux équations, ou ſéparément, ou priſes enſemble, ſatisfont au Problême, puiſque ce ſont deux lieux géométriques, qui ſe conſtruiſent par le moyen de deux lignes droites.

XCIII.

REMARQUE 3. Si l'on avoit $bg = af$, alors le dénominateur des équations . . . $x = z + \frac{cf - bh}{bg - af}$ & . . . . . $y = u + \frac{ah - cg}{bg - af}$ deviendroit égal à zéro ; donc ces termes ſeroient infinis, & par conſéquent la méthode ne feroit rien connoître. Mais alors ce cas ſeroit plus ſimple. Pour le prouver je remarque que la ſuppoſition préſente de $bg = af$ donne $f = \frac{bg}{a}$. Mettant donc pour f cette valeur dans la propoſée, elle devient $(ax + by + c)\,dx + (gx + \frac{gby}{a} + h)\,dy = 0$. Je lui donne cette autre forme $(ax + by)\,dx + (ax + by)\,\frac{g\,dy}{a} + c\,dx + h\,dy = 0$, & je ſuppoſe enſuite $ax + by = z$: je veux faire diſparoître y & dy, j'ai

j'ai donc $y = \frac{z - ax}{b}$: $dy = \frac{dz - adx}{b}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, il me vient $z \cdot \left\{ dx + \frac{g\,dz}{ab} - \frac{g\,dx}{b} \right\} + c\,dx + \frac{h\,dz}{b} - \frac{ah\,dx}{b} = 0$, ou bien $dx \left\{ z - \frac{gz}{b} + c - \frac{ah}{b} \right\} + dz \times \left\{ \frac{gz}{ab} + \frac{h}{b} \right\} = 0$: ou enfin $dx = \frac{dz \cdot \left\{ \frac{h}{b} + \frac{gz}{ab} \right\}}{\frac{gz}{b} - z + \frac{ah}{b} - c}$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées ; ce qui prouve, comme nous l'avons dit, que ce cas eſt plus ſimple.

XCIV.

SCHOLIE. Nous venons de détailler dans les Chapitres précédents la méthode de conſtruire les équations différentielles dont les indéterminées ſont ſéparées ; enſuite celle de ſéparer les indéterminées dans les équations lorſqu'elles ſont homogenes ; & enfin celle de rendre homogenes beaucoup d'équations qui ne le ſont pas. Paſſons à un cas très-général dans lequel les indéterminées ſe ſéparent tout de ſuite par une méthode fort ingénieuſe. Ce cas eſt celui de l'équation $AXy^n\,dy + By^{n+1}X'\,dx + y^q X''\,dx = 0$, n & q étant des nombres quelconques, X, X', X'', des fonctions quelconques de x, & A, B, C, des conſtantes à volonté, & il peut ſervir de formule pour ces ſortes d'équations, qui ne doivent par conſéquent pas avoir plus de trois termes.

CHAPITRE VII.

Sur la conſtruction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + Cy^q X' dx = o.$

XCV.

Procédé de la Méthode.

PROBLEME. SÉparer les indéterminées dans la formule * $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = o.$

SOLUTION. 1°. Je commence par diviſer l'équation par y^q, elle devient $AXy^{n-q} dy + BX'y^{n+1-q} dx + CX' dx = o.$ Cette premiere opération me donne un terme $CX' dx$ qui ne contient que dx & des fonctions de x.

2°. Je diviſe par AX, & j'ai $y^{n-q} dy + \frac{BX'y^{n+1-q} dx}{AX} + \frac{CX'' dx}{AX} = o.$ Ce ſecond procédé nous donne, comme on le voit, un terme tout en y, un tout en x, & un autre qui eſt mêlé.

3°. J'obſerve maintenant que ſi je pouvois multiplier les deux premiers termes de l'équation ainſi réduite par une fonction de x, telle que ces deux premiers termes fuſſent une différentielle exacte, j'aurois l'intégrale cherchée, le troiſieme terme s'intégrant de lui-même. Soit donc ſup-

* *Nota.* Voyez dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Ann. 1731. page 103. un Mémoire de M. de Maupertuis, où ſe trouve la conſtruction de l'équation $dx = ax^m y^n dy + by^{n+1} x^p dx$, par une méthode qui differe un peu de celle que nous donnons ici.

posé ξ la fonction de x qui rend ces deux termes une différentielle complete, & qui par conséquent n'empêchera pas le troisieme d'être intégrable, je multiplie l'équation par ξ; & j'ai, laissant à part le troisieme terme & n'opérant que sur les deux premiers, $\xi y^{n-q}dy + \frac{B\xi y^{n-q+1}X'dx}{AX}$ qui est une différentielle complete. J'ai donc (Théor. fondamental) $d\frac{(\xi y^{n-q})}{dx} = d\frac{(BX'\xi y^{n-q+1})}{AXdy}$: c'est-à-dire, $\frac{y^{n-q}d\xi}{dx} = \frac{(n-q+1)B\xi X'y^{n-q}}{AX}$; ou bien $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc $l\xi = \int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc enfin en passant des logarithmes aux nombres, & prenant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\xi = e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}}$. Voilà donc la valeur de ξ trouvée.

4°. Mettant cette valeur de ξ dans l'équation intégrée $\frac{\xi y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int\frac{C\xi X''dx}{AX} \pm Q = 0$, il nous vient $\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} + \int\frac{CX''dx}{AX} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} = \mp Q$; d'où l'on tire $y^{n-q+1} = (n-q+1).\times\left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX}.e^{\int(n-q+1)\frac{BX'dx}{AX}}\right)\times e^{\int-n+q-1.\frac{BX'dx}{AX}}$: ou enfin $y = \left\{\overline{n-q+1}.\times\left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX}\times e^{\int\overline{n-q+1}.\frac{BX'dx}{AX}}\right)\times e^{\int\overline{-n+q-1}.\frac{BX'dx}{AX}}\right\}^{\frac{1}{n-q+1}}$. De là il suit que quel que soit le rapport de A, B, C, n, q, dans l'équation, les indéterminées seront toujours séparées par cette méthode.

XCVI.

Observations sur la Méthode précédente.

REMARQUE 1. Si l'on avoit $n-q+1=0$, alors il y auroit des termes infinis; la méthode, par conséquent, paroîtroit ne rien donner. Mais il faut remarquer qu'alors $n-q=-1$, & qu'ainsi la proposée devient $\frac{A\,dy}{y}+\frac{BX'dx}{X}+\frac{CX''dx}{X}=0$, équation qui s'integre tout de suite, sans qu'il soit besoin d'avoir recours à notre méthode.

XCVII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit $X'=x^n$, & $X=x^{n+1}$, alors la valeur logarithmique de ξ, $e^{\int\overline{n-q+1}\cdot\frac{BX'dx}{AX}}$ seroit $e^{\int\overline{n-q+1}\cdot\frac{B\,dx}{A\,x}}$, & en faisant $\overline{n-q+1}\cdot\frac{B}{A}=K$, elle deviendroit $e^{\int\frac{K\,dx}{x}}=e^{Kl.x}$: à cause que e est supposé un nombre dont le logarithme $=1$, $e^{Klx}=x^K$; car soit $e^{Klx}=z$; on aura $le^{Klx}=lz$; ou bien $Klxle=lz$; or $le=1$, donc $Klx=lz$; donc enfin (Art. XXIX. Introd. Iere. Part.) & $x^K=z$; or $z=e^{Klx}$; donc $e^{Klx}=x^K$. Donc en mettant pour ξ sa valeur x^K dans l'équation $\xi y^{n-q}dy+\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}\times\overline{n-q+1}\cdot\frac{B\xi X'dx}{AX}+\frac{CX''\xi dx}{AX}=0$, on trouve $y^{n-q}dy\,x^K+Kx^{K-1}dx\times\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}+\frac{CX''x^{K-n-1}dx}{A}=0$; ce qui nous montre que dans ce cas l'équation est intégrable beaucoup plus simplement.

XCVIII.

COROLLAIRE 1. La formule que nous venons de traiter d'une maniere générale eſt des plus étendues : elle renferme une infinité de cas. Mlle Agneſi a traité la même formule dans ſes Inſtitutions Analytiques ; mais cette illuſtre Géometre employe pour la réſoudre une méthode différente de la nôtre. Celle dont elle ſe ſert, & qui eſt de M. Bernoulli, conſiſte à ſuppoſer y égale à deux nouvelles indéterminées ; & en faiſant les ſubſtitutions ordinaires, on parvient à la ſéparation des indéterminées par le moyen des quantités logarithmiques & exponentielles. Notre formule comprend auſſi toutes celles dont M. Craig a donné la ſéparation dans ſon Livre *de Calculo Fluentium*. C'eſt ce que nous développerons bien-tôt dans le Chapitre ſuivant, où nous donnerons les différentielles plus générales qui s'integrent par notre méthode.

Quelle eſt la généralité de la formule précédente.

Tom. 2. page 904, juſqu'à 914.

Tome 1. page 175.

Lib. de Calculo Fluent. p. 40. & ſeq.

XCIX.

COROLLAIRE. 2. Nous ſuppoſons dans notre formule A, B, C des coefficiens quelconques, dont les ſignes ſont poſitifs ou négatifs. Ainſi ſi on avoit $dx - ax^m y^n dy - by^{n+1} x^p dx = 0$, qui eſt l'équation que M. de Maupertuis traite dans le Mémoire que nous avons cité, ce cas n'auroit point de difficulté. Car comparant cette équation différentielle avec notre formule, on trouve

$$A = -a$$
$$B = -b$$
$$q = 0$$
$$X = x^m$$
$$X' = x^p$$

Donc ſubſtituant ces valeurs dans $\zeta = e^{\int \overline{n-q+1} \cdot \frac{BX'dx}{AX}}$, on a $\zeta = e^{\int \overline{n+1} \cdot \frac{-bx^p dx}{-ax^m}} = e^{\int \overline{n+1} \cdot \frac{bx^{p-m}dx}{a}}$, ou enfin $\zeta = e^{\frac{\overline{n+1} \cdot b}{(p-m+1)a} x^{p-m+1}}$. Si l'on avoit $dx - ay^n x^m dy + by^{n+1} x^p dx = 0$, où le ſecond terme eſt ſeul négatif, le cas ne ſeroit pas plus embarraſſant: on auroit alors $\zeta = e^{\frac{(n+1) \cdot b}{(p-m+1) \cdot -a} x^{p-m+1}}$; & ainſi des autres.

CHAPITRE VIII.

Des différentielles qui peuvent ſe ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

C.

LOrſque nous avons cherché les cas d'intégration des équations différentielles, en déterminant ceux où ces équations peuvent être rendues homogenes, les conditions d'intégrabilité ne tomboient que ſur les expoſants. On en peut auſſi trouver qui tombent ſur les coefficiens

en examinant les cas où la réduite ſera de la forme ſuivante, $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = 0$ que maintenant nous ſavons intégrer. Nous allons faire cette recherche, en ſuppoſant même que dans ces équations il ſe trouve des fonctions de x & de y. Nous marcherons des équations les plus ſimples aux plus compoſées, afin d'accoutumer les commençans à généraliſer les méthodes.

C I.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans l'équation $(x^n dx + ay^n dy) \cdot p = \left\{\frac{x dy - y dx}{xx}\right\} \cdot q$, dans laquelle p & q ſont des fonctions algébriques de x & de y, telle que la ſomme de leurs expoſants eſt la même dans chaque terme de p, & eſt auſſi la même dans chaque terme de q, quoique toutefois elle puiſſe être différente dans p & dans q. Premiere formule de ces différentielles.

SOLUTION. Je mets d'abord l'équation ſous la forme ſuivante $x^n dx + ay^n dy - (x dy - y dx) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Je fais $x = yz$, ce qui me donne $x^n = y^n z^n$

$$dx = y dz + z dy.$$

Donc en faiſant ces ſubſtitutions j'ai $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy - (zy dy - y^2 dz - zy dy) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Or q ſera (hyp.) $= y^m \varphi z$; & $pxx = y^s Tz$: donc $\frac{q}{pxx} = y^k \Delta z$; donc la propoſée eſt $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy + y^{k+2} \Delta z \cdot dz = 0$, ou $(z^{n+1} + a) \times y^n dy + y^{n+1} z^n dz + y^{k+2} \Delta z \cdot dz = 0$,

c'eſt-à-dire, $Zy^n dy + y^{n+1} z^n dz + y \Delta z . dz = 0$, équation qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre formule générale.

C II.

Application à quelques exemples particuliers.

Suppoſons que dans la formule $n = 2$

$$p = fxy^2 + gyx^2$$

$$q = mx^2y^2 + nyx^3,$$

Premier exemple.

l'équation dont il faut ſéparer les indéterminées eſt $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fxy^2 + gyx^2) = \left\{\frac{xdy - ydx}{xx}\right\} \times (mx^2y^2 + nyx^3)$; ou $x^2 dx + ay^2 dy - (xdy - ydx) \times \frac{mx^2y^2 + nyx^3}{fx^3y^2 + gyx^4} = 0$. Soit $x = yz$. La transformée ſera $y^3z^2 dz + z^3y^2 dy + ay^2 dy - (zydy - y^2 dz - zydy) \times \frac{my^4z^2 + ny^4z^3}{fy^5z^3 + gy^5z^4} = 0$; & en réduiſant $(z^3 + a) \cdot y^6 dy + y^3z^2 dz + \left\{\frac{m + nz}{fz + gzz}\right\} ydz = 0$, qui s'intègre par le Chapitre précédent, en mettant l'indéterminée z au lieu de x.

C III.

Seconde formule.

PROBLEME 2. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) \times p = (xdy + cydx) \times q$: p & q ſont des fonctions algébriques de x & de y, telles que l'excès de l'expoſant de l'une de ces deux indéterminées multiplié par c ſur l'expoſant de l'autre indéterminée ſoit le même dans chaque terme de p ; & que cette même condition ſe trouve auſſi dans chaque terme de q, ſans qu'il ſoit pour cela néceſſaire que p & q ſoient des fonctions

fonctions homogenes de x & de y.

SOLUTION. Je mets l'équation sous la forme suivante. $x^n dx \pm a y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy\,(-x dy - c y dx) \cdot \frac{q}{p} = 0$. Je remarque maintenant que par les conditions du Problême, chaque terme de p étant, par exemple $y^s x^r$, on doit avoir $s \times c - r = M$ (une constante); donc $r = s \times c - M$, donc $y^s x^r$ devient $y^s x^{s \times c - M} = \frac{y^s x^{s \times c}}{x^M}$. De même chaque terme de q sera de la forme suivante $\frac{y^k x^{k \times c}}{x^N}$.

Ce calcul me montre que la transformation que je dois faire est $y x^c = z$; donc $x^c dy + c y x^{c-1} dx = dz$

ou , ... $(x dy + c y dx) x^{c-1} = dz$

on a aussi . . . . . $y = \frac{z}{x^c}$.

$$y^{\frac{-n-1-c}{c}} = x^{n+1+c} z^{\frac{-n-1-c}{c}}.$$

$$dy = \frac{x^c dz - c z x^{c-1} dx}{x^{2c}}.$$

Donc en substituant dans la proposée pour y & dy leurs valeurs, on aura la transformée

$$x^n dx \pm \frac{a x^{n+1+2c} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx}{c^{2c}}$$

$(-x^{-c+1} dz) \frac{q}{p} = 0$: or il est évident par ce que nous venons de dire que $\frac{q}{p} = x^s \varphi z$; donc on aura

$$x^{n+2c} dx \pm a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx$$

$$- x^{s+c+1} dz \varphi z = 0 \text{ ou } \left(1 \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^{n+2c} dx$$

$\pm a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - x^{1+c+1} dz\,qz = 0$; équation réduite au cas général du Chapitre précédent, & dont par conséquent nous savons séparer les indéterminées.

CIV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule $\begin{cases} n = -10 \\ c = 3 \\ p = by^2 x^4 + fy^9 x^{25} \\ q = gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{61}{2}} \end{cases}$

La proposée sera $x^{-10} dx + ay^2 dy - (x dy + 3y dx) \times \frac{gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{61}{2}}}{by^2 x^4 + fy^9 x^{25}} = 0$. La transformation qu'il faudra faire est donc $yx^3 = z$; après les différentes substitutions, on aura la transformée suivante $x^{-10} dx + \frac{ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx}{x^6} - x^{-2} dz \times \left\{ \frac{gz^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - hz^{10} x^{\frac{3}{2}}}{bz^2 x^{-2} + fz^9 x^{-2}} \right\} = 0$. Donc $x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx - x^4 dz \times x^{\frac{7}{2}} \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$. Donc enfin $(1 - 3az^3) x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - x^{4+\frac{7}{2}} dz \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$, équation réduite à notre cas général.

CV.

Troisieme formule qui comprend les deux précédentes.

PROBLEME 3. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-fn-c-f}{e}} dy)\, p = (fx dy + cy dx)\, q$?

Les formules des deux Problêmes précédents ne sont que

des cas particuliers de celle-ci ; celle du Problême 2, lorſque $f = 1$, & celle du Problême premier, quand $f = 1$ & $c = -1$; p & q ſont des fonctions de x & y telles que celles du Problême précédent, excepté qu'au lieu de multiplier par c l'expoſant de l'une des deux indéterminées dans que terme de p & de q, il le faut multiplier par $\frac{c}{f}$. Il faut de plus que p & q ſoient telles qu'après y avoir ſubſtitué pour y ſa valeur en x & en z, ou pour x ſa valeur en y & en z, on trouve des quantités compoſées de deux facteurs, dont l'un contienne x ſans z, & l'autre z ſans x dans le premier cas ; ou dont l'un contienne y ſans z, & l'autre z ſans y dans le ſecond.

SOLUTION. La propoſée eſt $x^n dx \pm a y^{\frac{-fn-c-f}{c}} dy - (fx dy + cy dx)\frac{q}{p} = 0$. Pour trouver la transformation qui réuſſira, je raiſonne comme dans le Problême précédent, & je vois qu'il faut ſuppoſer $y x^{\frac{c}{f}} = z$: cette ſuppoſition me donne $x^{\frac{c}{f}} dy + \frac{c}{f} y x^{\frac{c}{f}-1} dx = dz$ ou . . . . . $fx dy + cy dx = \frac{f dz}{x^{\frac{c}{f}-1}}$.

Je ſubſtitue pour y & dy leurs valeurs $y = \frac{z}{x^{\frac{c}{f}}}$,

$$dy = \frac{x^{\frac{c}{f}} dz - \frac{c}{f} z x^{\frac{c}{f}-1} dx}{x^{\frac{2c}{f}}} ;$$

j'ai donc la transformée ſuivante $\left(1 \mp \frac{acz}{f}^{\frac{-fn-f}{c}}\right) x^{\frac{fn+2c}{f}} dx \pm a x^{\frac{fn+2c}{f}+1} z^{\frac{-fn-c-f}{c}} dz - f x^{n+\frac{c}{f}+1}$

$dz \varphi z = 0$, équation réduite à notre cas général.

CVI.

Application de cette formule à un exemple.

Supposons que dans la formule précédente $f = -3$, $n = 2$, $c = 1$, $p = y$, $q = ax$:

L'équation à intégrer sera $(x^2 dx + ay^2 dy)\, y = (-3x dy + y dx)\, ax$, ou bien $x^2 dx + ay^2 dy - (-3x dy + y dx)\frac{ax}{y} = 0$. Donc la supposition qu'il faut faire ici est $y x^{-\frac{1}{3}} = z$. Faisant les substitutions convenables pour y & dy, nous aurons la transformée suivante $x^2 dx + ax^3 z^2 dz + \frac{ax^3}{3} z^2 x^2 dx + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$; ou bien $(1 + \frac{a}{3} z^2)\, x^2 dx + ax^3 z^2 dz + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$, équation réduite au cas général.

CVII.

Quatrieme formule.

PROBLEME 4. Séparer les indéterminées dans la formule $ax^n dx + by^n dy + (x dy - y dx) \times \left\{\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega}\right\} = 0$.

Celle-ci est encore plus générale que les précédentes, p & q étant des fonctions homogenes de x & de y, mais de différentes dimensions, si l'on veut, dont la différence soit k; & π, ω étant aussi des fonctions de x & de y homogenes chacunes telles que l'excès du nombre des dimensions de π sur celles de ω soit $n - 1$.

SOLUTION. Soit $x = yz$, on aura $ay^{n+1}z^n dz + ay^n z^{n+1} dy + by^n dy + (zydy - yydz - zydy) \times (y^k \Delta z + y^{n-1} \varphi z) = 0$, c'eſt-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} az^{n+1} y^n dy \\ + by^n dy \end{array}\right\} \begin{array}{l} + ay^{n+1} z^n dz. \\ - y^{n+1} dz \varphi z - y^{k+2} dz \Delta z = 0, \end{array}$$

équation qui eſt, comme l'on voit, dans notre cas général, & de laquelle par conſéquent on ſéparera les indéterminées ſans aucune difficulté.

CVIII.

Application à un exemple.

Suppoſons que dans la formule . . . . $n = 7$

$$\frac{p}{q} = \frac{x^3y + y^3x}{yx}$$

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{x^8y + y^8x}{x^3 + y^3};$$

l'équation à intégrer ſera $ax^7dx + by^7dy + (xdy - ydx) \times \left\{ \frac{x^3y + y^3x}{xy} + \frac{x^8y + y^8x}{x^3 + y^3} \right\} = 0$. Soit dans cette équation $x = yz$, & ſubſtituons pour x & dx leurs valeurs, nous aurons la transformée ſuivante $ay^8z^7 dz + az^8y^7 dy + by^7 dy + (zydy - y^2 dz - zydy) \times \left\{ y^2 \times (z^2 + 1) + y^6 \times \left(\frac{z^8 + z}{z^3 + 1} \right) \right\} = 0$; qui devient après la réduction $az^8y^7 dy + ay^8z^7 dz - y^4 . (z^2 + 1) dz + by^7 dy - y^8 . \left\{ \frac{z^8 + z}{z^3 + 1} \right\} dz = 0$, équation telle que nous la demandons.

CIX.

Formule précédente généraliſée.

PROBLEME 5. Trouver les cas dans leſquels on parvient à ſéparer les indéterminées dans la formule $hx^q dx + by^n dy + (xdy + gydx) \times \left\{ \frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} \right\} = 0$.

Je ne mets point de coefficient à $x\,dy$, parce qu'il eſt toujours aiſé de débarraſſer de ſon coefficient un des deux termes; p, q, π, ω, étant des fonctions de x & de y, telles que a étant l'expoſant de x dans un terme quelconque de p, & r l'expoſant de y; a' l'expoſant de x dans q, & r' celui de y; α l'expoſant de x dans π, & ρ celui de y; α' l'expoſant de x dans ω, & ρ' celui de y; on ait dans chaque terme de p, $-\frac{a}{g}+r=A$, dans chaque terme de q, $-\frac{a'}{g}+r'=A'$, & de même dans chaque terme de π & de ω, $-\frac{\alpha}{g}+\rho=B$ & $-\frac{\alpha'}{g}+\rho'=B'$; A, A', B, B' ſont des conſtantes différentes. Il faut de plus que dans π & ω $-\frac{\alpha}{g}+\rho+\frac{a'}{g}-\rho'=n+\frac{1}{g}$.

SOLUTION. Pour trouver quelle eſt la transformation qui réuſſira le mieux, j'obſerve qu'en faiſant $x=zy^{-\frac{1}{g}}$, j'aurai $x\,dy+gy\,dx=gy^{-\frac{1}{g}+1}\,dz$; ce qui me détermine à faire cette ſuppoſition. La transformée qu'elle me donne eſt $hy^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}z^q\,dz-\frac{h}{g}z^{q+1}y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}\,dy+by^n\,dy+gy^{-\frac{1}{g}+1}\,dz\times(y^k\Delta z+y^f\varphi z)=0$. Or il eſt évident que cette équation ſe ramenera au cas général que nous traitons toutes les fois qu'on aura

$$n=-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1.$$

$$\&\ k\text{ ou }f=-\frac{q}{g}-1=n+\frac{1}{g},$$

car alors l'équation précédente devient $(b-\frac{h}{g}z^{q+1})y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}\,dy+(hz^q+g\varphi z)y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}\,dz+gy^{k-\frac{1}{g}+1}\,dz\Delta z=0$; qui eſt telle qu'on la demande.

CX.

Application de la formule à un exemple.

Soit l'équation à intégrer $x^{-21}dx + by^3dy + (xdy + 5ydx) \times \left\{ \frac{xy^{3-\frac{1}{5}} + x^2y^3}{x^2y - x^3y^{1+\frac{1}{5}}} + \frac{ax^2y^{\frac{4}{5}+6} + by^{\frac{2}{5}+6}}{x^2y^{\frac{4}{5}+3} + x^3y^{\frac{19}{5}}} \right\} = 0$; je ferai . . . . . $x = zy^{-\frac{1}{5}}$

ce qui me donne. . . . $dx = y^{-\frac{1}{5}}dz - \frac{1}{5}zy^{-\frac{1}{5}-1}dy$

$$xdy + 5ydx = 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz.$$

Donc en ſubſtituant pour x & pour dx leurs valeurs, on aura la transformée $y^4z^{-21}dz - \frac{1}{5}z^{-20}y^3dy + by^3dy + 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz \times \left\{ y^2 \cdot \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) + y^{\frac{1}{5}+3} \cdot \left(\frac{az^2+b}{z^2+z^3}\right) \right\} = 0$, laquelle devient en réduiſant $\left(b - \frac{1}{5}z^{-20}\right)y^3dy + \left\{ z^{-21} + \left(\frac{5az^2+5b}{z^2+z^3}\right) \right\} y^4dz + 5y^{2+\frac{1}{5}}dz \times \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) = 0$, équation qui a les conditions cherchées.

CXI.

COROLLAIRE. Si dans la formule du Problême précédent on avoit $A - A' = B - B'$, alors la formule ſe réduiroit à un cas plus ſimple. Car en multipliant p par ω & π par q, & ω & q l'un par l'autre, on verroit que les deux fonctions $\frac{p}{q}$ & $\frac{\pi}{\omega}$ ſe réduiroient à une ſeule $\frac{K}{L}$, telle qu'en ſuppoſant m l'expoſant de x, & μ l'expoſant de y dans K, m' l'expoſant de x & μ' l'expoſant de y dans L, on aura encore dans chaçun des termes de $K - \frac{m}{g} + \mu = C$ & dans chaque terme de L, $- \frac{m'}{g} + \mu' = C'$, C & C' étant des conſtantes différentes. Ce

ſeroit la même choſe ſi l'on avoit $\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{p'}{q'} + \frac{\pi'}{\omega'}$ + &c. un nombre quelconque de fonctions avec la condition requiſe par le Corollaire ; elles ſe réduiroient toutes à une ſeule.

CXII.

PROBLEME 6. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $dx + \frac{fx\,dy}{y} = \frac{y^k x^r dy\,\Delta\frac{x}{y^n} + y^t x^s dx\,Z\frac{x}{y^n}}{y^m x^p \varphi\frac{x}{y^n} + y^q x^h \Gamma\frac{x}{y^n}}$

dans laquelle on ſuppoſe $n = -f$.

SOLUTION. Soit . . . . . $\frac{x}{y^n} = u$

on aura . . . . . $y^{-n} dx - nxy^{-n-1} dy = du$

(& comme $-f = n$ hyp.) $y^f dx + fxy^{f-1} dy = du$

ou . . . . . $dx + \frac{fx\,dy}{y} = y^{-f} du$.

En faiſant pour x & dx les ſubſtitutions convenables, on aura la transformée ſuivante $y^{-f} du =$

$$\frac{y^{k-fr} dy\,\Delta u \times u^r + y^{t-fs-f} du\,Zu \times u^s - fu^{s+1} Zu \cdot y^{t-fs-f-1} dy}{y^{m-fp} u^p \varphi u + y^{q-fh} u^h \Gamma u}$$

ou bien $y^{m-fp-f} u^p \varphi u \cdot du + y^{q-fh-f} u^h \Gamma u \cdot du - u^r \Delta u \cdot y^{k-fr} dy - y^{t-fs-f} u^s Zu \cdot du + fu^{s+1} Zu \cdot y^{t-fs-f-1} dy = 0$, équation qui ſe ramene à la formule $Vy^\lambda dy + V' y^{\lambda+1} du + V'' y^\mu du = 0$ (V, V', V'' étant des fonctions de u) toutes les fois qu'on a $k - fr = t - fs - f - 1$ & . . . . . $q - fh$ ou $= t - fs$ ou $= m - fp$

c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, toutes les fois qu'on aura $k = t - f - 1$

$s = r$

& . . . . . $q = t$ ou $m = t$

$h = s$ $p = s$

CXIII.

COROLLAIRE. Donc on ſéparera les indéterminées dans l'équation $dx - \frac{x\,dy}{y} = \frac{dy\,\Delta\frac{x}{y}}{\varphi\frac{x}{y} + y^{p}\,\Gamma\frac{x}{y}}$ en faiſant $\frac{x}{y} = u$. Car on aura l'équation ſuivante $-\Delta u \cdot dy + \varphi u \cdot y\,du + y^{p+1}\,\Gamma u \cdot du = 0$ qui a les conditions requiſes.

CXIV.

Application de la formule à un exemple.

Soit dans la formule . . . . . $k = 3$

$f = 1$

$q = t = 5$

$h' = r = s = 2$

$n = -1$

$m = -2$

$p = -3$

la propoſée ſera $dx + \frac{x\,dy}{y} = \frac{ay^{4}x^{3}\,dy + by^{7}x^{4}\,dx}{cy + gy^{6}x^{3}}$. Je ſuppoſe $xy = u$, ce qui me donne $dx + \frac{x\,dy}{y} = y^{-1}\,du$ & pour transformée l'équation $y^{-1}\,du = \frac{au^{3}y\,dy + by^{2}u^{4}\,du - bu^{5}y\,dy}{cy + gu^{3}y^{3}}$, ou bien $c\,du + gy^{2}u^{3}\,du - au^{3}y\,dy - by^{2}u^{4}\,du + bu^{5}y\,dy = 0$, d'où l'on tire $(+u^{5} - au^{3})\,y\,dy + (gu^{3} - bu^{4})\,y^{2}\,du + c\,du = 0$, qui eſt réduite à l'état demandé.

CXV.

REMARQUE. On voit par les applications que nous venons de faire de la méthode du Chapitre VII. combien cette méthode eſt générale. Nous rencontrerons encore dans la ſuite de cet Ouvrage pluſieurs équations différentielles qui s'integrent par ſon moyen. Les Problêmes que nous venons de traiter renferment les cas les plus généraux qui peuvent s'y rapporter.

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI.

Formule des équations à trois termes.

TOutes les équations différentielles à trois termes peuvent être compriſes ſous la forme ſuivante (A) $ax^m u^p dx + bu^k x^n dx = du$, ou en faiſant $x^{n+1} = z$, ſous cette autre (B) $az^m u^p dz + bu^k dz = du$. Si on diviſe l'équation (B) par u^p, & que l'on ſuppoſe $u^{-p+1} = y$, alors l'équation (B) aura cette forme (C) $ax^m dx + by^q dx = dy$.

Comparée avec celle du Chapitre VI.

1°. Comparant cette équation avec la formule des équations à trois termes que nous avons déja examinée (Chap. VI. Art. LXXXII.) & qui eſt $ay^n x^m dx + by^q x^p dx$

$+ cy^s x^r dy = 0$, on a . . . . . $n = 0$

$p = 0$

$s = 0$

$r = 0$.

La formule $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) \times (n - q)$, qui exprime la condition que doit avoir l'équation précédente pour devenir homogene, eſt donc ici $q = \frac{m}{m+1}$. Donc toutes les fois qu'on aura dans (C) $q = \frac{m}{m+1}$, en faiſant $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $au^{\frac{m}{m+1}} du - (m+1) . u^{\frac{m}{m+1}} dy + cy^{\frac{m}{m+1}} du = 0$, équation homogene, & par conſéquent intégrable, ou au moins conſtructible.

2°. Si $q = 1$, la propoſée (C) devient $ax^m dx + cy dx = dy$, équation intégrable (Chap. VII.).

CXVII.

3°. Si dans l'équation $ax^m dx + cy^q x^n dx = dy$, on a $q = 2$, cette équation devient $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, qui eſt la fameuſe équation que tous les Géometres connoiſſent ſous le nom de l'équation de Ricati. Dans cette équation on n'a pu juſques ici ſéparer en général les indéterminées; mais il y a une infinité de valeurs de m dans leſquelles on parvient à cette ſéparation. Voici la méthode dont je me ſers pour déterminer tous ces différents cas.

CXVIII.

Méthode pour trouver les cas dans lesquels on integre l'équation de Ricati.

PROBLEME. Trouver les cas d'intégration de l'équation $ax^m dx + cy^2 x^n dx = dy$.

SOLUTION. Je fais $y = Ax^p + x^r t$. (Le coefficient A, & les exposants p & r sont des constantes arbitraires que nous déterminerons dans la suite de l'opération, t est une nouvelle indéterminée). J'aurai donc $dy = pAx^{p-1} dx + rx^{r-1} t dx + x^r dt$, & $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r} t + x^{2r} tt$: mettant pour y, yy, dy leurs valeurs dans l'équation proposée, elle devient $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + cttx^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$.

Supposons à présent . . . . . $cAA = pA$

$$2p + n = p - 1$$

$$r = 2cA$$

c'est-à-dire . . . . . $p = -n - 1$,

$$A = \frac{-n-1}{c}$$

$$r = -2n - 2.$$

Par le moyen de ces égalités, les 2, 3, 5, 6e termes de la transformée se détruisent, & elle devient $ax^m dx + cttx^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$, c'est-à-dire, divisant par x^{-2n-2}, $ax^{m+2n+2} dx + cttx^{-n-2} dx = dt$, ou $(D)\ ax^K dx + cttx^k dx = dt$, en supposant $m + 2n + 2 = K$ & . . . . . $-n - 2 = k$

Je reprends à présent la proposée $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, laquelle en faisant $y = \frac{1}{z}$ devient $ax^m dx$

$+\frac{cx^n dx}{zz} = -\frac{dz}{zz}$, ou $ax^m zz\,dx + cx^n dx = -dz$, dans laquelle je ſuppoſe, comme plus haut, $z = Bx^q + x^\alpha u$ (B, q, α, ſont de même des conſtantes indéterminées, u eſt une nouvelle variable) : on a donc $dz = qBx^{q-1}dx + \alpha u x^{\alpha-1}dx + x^\alpha du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+\alpha}u + uux^{2\alpha}$, & ſubſtituant ces valeurs, nous avons $aBBx^{2q+m}dx + 2aBx^{q+\alpha+m}udx + auux^{2\alpha+m}dx + cx^n dx = -qBx^{q-1}dx - \alpha x^{\alpha-1}udx - x^\alpha du$; ſuppoſons à préſent $aBB = -Bq$, $2q+m = q-1$, $-\alpha = 2aB$, c'eſt-à-dire . . . . $q+m = -1$

$$B = \frac{m+1}{a}$$

$$\alpha = -2m-2$$

par ces ſuppoſitions les 1er, 2, 5 & 6e termes de la derniere équation ſe détruiſent, & elle devient $auux^{-3m-4}dx + cx^n dx = -x^{-2m-2}du$, c'eſt-à-dire en diviſant par x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, ou enfin ($G$) $cx^B dx + auux^\delta dx = -du$ en ſuppoſant

$$B = 2m+n+2$$

& . . . . . $\delta = -m-2$.

CXIX.

Il eſt évident que dans l'équation $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, on ſépareroit tout de ſuite les indéterminées, ſi l'on avoit $m = n$; donc dans les formules (D) & (G), on parviendra à cette ſéparation toutes les fois qu'on aura

$$m+2n+2 = -n-2$$

& . . . . . $2m+n+2 = -m-2$

équations d'où l'on tire deux valeurs de m, ſavoir

$$m = -3n-4$$

& . . . . . $m = \frac{-n-4}{3}$,

leſquelles étant ſuppoſées, les indéterminées ſe ſéparent.

Puiſque dans la propoſée on ſépare les indéterminées, lorſque $m = \frac{-n-4}{3}$, on les ſéparera dans les formules (G), (D), lorſque $K = \frac{-k-4}{3}$, & $B = \frac{-\delta-4}{3}$, équations deſquelles on tire deux autres valeurs de m, ſavoir

$$m = \frac{-5n-8}{3}$$

$$m = \frac{-3n-8}{5}.$$

On trouvera, en continuant ainſi, une infinité d'autres valeurs de m, comme . . . . . $m = \frac{-7n-12}{5}$

$$m = \frac{-5n-12}{7}$$

$$m = \frac{-9n-16}{7}$$

$$m = \frac{-7n-16}{9}$$ &c.

c'eſt-à-dire en général . . . . . $m = \frac{(2h+1)\times-n-4h}{2h+1}$, h repréſente un nombre quelconque entier, poſitif en commençant par l'unité.

CXX.

REMARQUE 1. Il faut ajouter qu'on ſéparera les indéterminées dans la formule précédente, toutes les fois qu'on la pourra rendre homogene par la ſeconde méthode du Chap. VI.

CXXI.

REMARQUE 2. Si dans l'équation $ax^m dx +$

$byyx^n dx = dy$, on ſuppoſe $n = 0$, elle devient $ax^m dx + byy dx = dy$, & la formule trouvée dans le Problême pour la valeur de m, ſera $m = \frac{(2h \mp 1)\times - n - 4h}{2h \mp 1}$ devient $m = \frac{-4h}{2h \mp 1}$; dans ce cas voici la méthode qu'il faut ſuivre pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h \mp 1}} dx + byy dx = dy$. Prenons cette autre équation (A) $-ads + btt ds = dt$, qui donne $(z) -ds = \frac{dt}{a - btt}$, différentielle dont l'intégrale eſt (par les méthodes des fractions rationelles) en ajoutant une conſtante C, $C - s = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times (l\overline{\sqrt{a} + t\sqrt{b}} - l\overline{\sqrt{a} - t\sqrt{b}})$, & en prenant k pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a (B) $k^{\overline{C-s}\cdot 2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}+t\sqrt{b}}{\sqrt{a}-t\sqrt{b}}$. L'équation (B) eſt donc identique avec l'équation (α), je fais dans l'une & dans l'autre $s = -x^{-1}$ & . . . . . $t = \frac{1}{b}x + xxy$, les équations qui réſulteront de ces ſubſtitutions ſeront encore identiques ; on a $ds = \frac{dx}{xx}$ $dt = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{b}$ $tt = \frac{xx + 2bx^3y + bby^2x^4}{bb}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation (α), on a $\frac{-dx}{xx} = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{ab - xx - 2bx^3y - b^2y^2x^4}$, ou $-abdx + xxdx + 2bx^3ydx + b^2y^2x^4dx = xxdx + 2bx^3ydx + bx^4dy$, ou en effaçant ce qui ſe détruit $-adx + by^2x^4dx = x^4dy$, & enfin en diviſant par x^4, $-ax^{-4}dx + byydx = dy$ premiere équation réduite.

Maintenant l'équation exponentielle (B) devient après des réductions fort ſimples (D) $k^{(Cx+1)\cdot 2\frac{\sqrt{ab}}{x}} = \frac{x + bxxy + \sqrt{ab}}{-x - bxxy + \sqrt{ab}}$. Mais C eſt une quantité arbitraire.

Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation propoſée dans la ſuppoſition de $n = 0$.

1°. Je la ſuppoſe une quantité infinie poſitive, le premier membre de l'équation exponentielle ſera infini : il faudra donc néceſſairement que l'autre le ſoit auſſi. Or c'eſt ce qui arrive, lorſque ſon dénominateur eſt $= 0$, on aura donc $-x - bxxy + \sqrt{ab} = 0$, ce qui donne $y = \frac{-x+\sqrt{ab}}{bxx}$, ou $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$, équation compriſe dans l'intégrale de $-ax^{-4}dx + byydx = dy$.

2°. Si on ſuppoſe C une quantité infinie négative, le premier membre de l'équation (D) ſera $= 0$, donc le numérateur du ſecond membre ſera auſſi $= 0$; c'eſt-à-dire qu'on aura $x + bxxy + \sqrt{ab} = 0$: ce qui donne $y = -\frac{1}{bx} - \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$; & combinant l'une & l'autre valeur de y, on a $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$ pour l'intégrale cherchée de l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h-1}}dx + byydx = dy$ dans laquelle on ſuppoſe $h = 1$.

On voit par là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'intégrale de cette même équation, en donnant ſucceſſivement à h différentes valeurs.

CHAPITRE

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII.

TOutes les équations à quatre termes peuvent ſe réduire à l'une de ces deux formes,

$$x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + ady = 0$$

ou $x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + ady = 0.$

Ces équations ſont toutes compriſes dans deux formules.

1°. Si l'on cherche, comme on a fait pour les équations à trois termes, les cas où ces ſortes d'équations peuvent être intégrées, on trouvera dans le premier cas $p = \frac{m-n}{m+1}$ & . . . . . $s = \frac{m}{m+1}$.

Premiere maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules.

Car ſoit $x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + ady = 0$, & faiſons $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, en mettant dans la transformée pour p & s leurs valeurs, on aura l'équation ſuivante $\frac{du}{m+1} + \frac{by^{\frac{m-n}{m+1}} u^{\frac{n-m}{m+1}} du}{m+1} + \frac{cy^{\frac{m}{m+1}} u^{\frac{-m}{m+1}} du}{m+1} + ady = 0$, laquelle eſt homogene. Donc, &c.

En examinant ceux dans leſquels elles peuvent devenir homogenes.

2. Dans le ſecond cas nous avons déja vu (Chap. VI. ART. LXXXVI.) que l'équation à quatre termes $ax^m y^n dx + by^p x^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy = 0$, qui eſt plus générale que la précédente, devenoit homogene, 1°. ſi l'on avoit $(s+p+1).(q-m) = (q-r+1).(n-p)$:

$2°.\ (u-p+1).(q-m) = (q-e+1).(n-p)$.
Comparant cette équation avec la propoſée, on a $n = 0$

$q = 0$

$e = 0$

$u = 0$

ce qui nous avertit qu'on doit avoir $\frac{s+1}{m+1-r} = \frac{p}{m}$, & $p = \frac{m}{m+1}$, c'eſt-à-dire $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$. Enſuite on fera $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, ce qui donne, en ſubſtituant ces différentes valeurs, la transformée $\frac{du}{m+1} + \frac{by^{\frac{m}{m+1}} u^{\frac{-m}{m+1}} du}{m+1}$ $+ cu^{\frac{r}{m+1}} y^{\frac{-r}{m+1}} dy + ady = 0$, homogene comme dans le cas précédent.

CXXIII.

Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes.

Mais il y a d'autres méthodes pour découvrir encore de nouveaux cas d'intégration dans les formules précédentes : nous allons les examiner, 1°. pour la formule $x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + ady = 0$.

Appliquée à la premiere formule.

Il eſt viſible que ſi dans cette équation on fait $y = gu^q x^h$, elle ſe changera en une équation de cinq termes, dont on pourra ſuppoſer que deux ſe détruiſent dans certains cas particuliers, ce qui réduira la transformée à trois termes. L'équation de cinq termes eſt $x^m dx + bg^p u^{pq} x^{n+ph} dx + cg^s u^{qs} x^{hs} dx + agqu^{q-1} x^h du + agh x^{h-1} u^q dx = 0$, équation dans laquelle on voit d'abord que ſi on ſuppoſe 1°. $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx +$

$cg^s u^{qs} x^{hs} dx = 0$, on aura . . . . . $s = p$

$n = 0$

$b = -c$

& la propoſée ſera par conſéquent $x^m dx + a dy = 0$, qui n'a que deux termes. Donc on ne peut faire cette premiere ſuppoſition.

2°. On ne peut ſuppoſer non plus $cg^s u^{qs} x^{hs} dx + agh x^{h-1} u^q dx = 0$, comme il eſt aiſé de le voir; car alors on auroit $s = 1$ & $h = h - 1$; ce qui eſt abſurde.

3°. La ſeule ſuppoſition qu'on puiſſe faire ſans que la propoſée ſe réduiſe à n'avoir que deux termes, eſt celle de $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx + agh x^{h-1} u^q dx = 0$, qui nous donne . . . . . $p = 1$

$n = -1$

$h = -\frac{b}{a}$

Donc en faiſant $y = g u^q x^{-\frac{b}{a}}$, ou ſimplement $y = u x^{-\frac{b}{a}}$, l'équation $x^m dx + b y x^{-1} dx + c y^s dx + a dy = 0$ ſe réduit à celle-ci de trois termes $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + ag x^{-\frac{b}{a}} du = 0$. Or il eſt évident 1°. que cette équation eſt intégrable ou au moins conſtructible, ſi $m = -\frac{bs}{a}$: car alors on a $\frac{dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{cu^s dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{a du}{x^{\frac{b}{a}}} = 0$; & multipliant toute l'équation par $x^{\frac{bs}{a}}$, on a $dx + cu^s dx + a x^{\frac{-b+bs}{a}} du = 0$; ou enfin $\frac{dx}{x^{\frac{-b+bs}{a}}} =$

Equation transformée.

Cas dans leſquels elle eſt intégrable ou conſtructible.

$\frac{-a\,du}{1+cu^s}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. Donc l'équation $x^m\,dx + by\,x^{-1}\,dx + cy^s\,dx - \frac{bs}{m}\,dy = 0$ eſt intégrable.

2°. Si on réduit l'équation $x^m\,dx + cu^s\,x^{-\frac{bs}{a}}\,dx + ax^{-\frac{b}{a}}\,du = 0$ à la forme $x^m\,dx + a\,dy + by^p\,dx = 0$, en la mettant ſous celle-ci $x^{m+\frac{b}{a}}\,dx + cu^s\,x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}}\,dx + a\,du = 0$, & qu'on faſſe $x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}+1} = z$; ce qui donne $x = z^{\frac{a}{-bs+b+a}}$ &c. on aura après les ſubſtitutions ordinaires $z^{\frac{am+bs}{-bs+b+a}}\,dz + q\,du + ku^s\,dz = 0$: d'où l'on conclura que ſi $s = \frac{m}{m+1}$, on peut intégrer, puiſqu'alors l'équation eſt $z^m\,dz + q\,du + ku^{\frac{m}{m+1}}\,dz = 0$, qui devient homogene en faiſant $z = y^{\frac{1}{m+1}}$. En effet, cette transformation nous donne $Ay^{\frac{m}{m+1}}\,dy + qy^{\frac{m}{m+1}}\,du + Bu^{\frac{m}{m+1}}\,dy = 0$.

Si $s = 1$, alors l'équation devient $q\,du + ku\,dz + z^{\frac{am+b}{a}}\,dz = 0$, dans laquelle les indéterminées ſe ſéparent par la méthode du Chapitre VII.

De même ſi $s = 2$, l'intégration ſera poſſible toutes les fois que $\frac{am+2b}{a-b} = \frac{-4n}{2n\pm 1}$, n exprimant un nombre entier poſitif, puiſqu'alors c'eſt le cas de l'équation de Ricati.

CXXIV.

Application de cette même méthode à la seconde formule.

En appliquant cette méthode à la seconde formule des équations à quatre termes $x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + ady = 0$ mise sous cette autre forme plus commode & aussi générale $dx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy + ady = 0$, on trouve outre les cas dont l'intégration se présente d'elle-même, ou qui se rapportent à ceux dans lesquels $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$, on trouve, dis-je, qu'en supposant . . . . . $c = -b$

$$s = p - 1$$
$$n = r + 1$$

l'équation $dx + by^p x^r dx - by^{p-1} x^{r+1} dy + ady = 0$ sera toujours intégrable en faisant $y = ux$. En effet la transformée devient alors $(1 + au)dx + axdu - bu^{p-1} x^{r+p+1} du = 0$, qui est intégrable par la méthode générale du Chapitre VII.

CXXV.

SCHOLIE. Après avoir examiné les cas dans lesquels on peut intégrer chacune des deux formules des équations à quatre termes, il ne sera pas inutile de chercher aussi les cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx - cyy dx = 0$, qui ne differe de celle de Ricati que par le terme $byx^n dx$. C'est ce que nous allons faire dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = o$.

CXXVI.

PROBLEME. TRouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = o$.

Transformation néceſſaire dans le cas préſent.

SOLUTION. Soit $y = px^r + fx^s z^t$; on voit bien que p, r, s, t, f étant des indéterminées que nous prenons à volonté, nous ſerons les maîtres de leur donner dans la ſuite telle valeur que nous voudrons. Après les ſubſtitutions on aura la transformée ſuivante (A) $x^m dx + aprx^{r-1} dx + afsz^t x^{s-1} dx + aftx^s z^{t-1} dz + bpx^{r+n} dx + bfx^{s+n} z^t dx + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = o$; pour abreger, on laiſſera dans la ſolution ſuivante p au lieu de ſa valeur $\frac{-1}{b+am+a}$.

Equation transformée.

CXXVII.

Premiere ſuppoſition pour cette équation.

Soit d'abord $afsz^t x^{s-1} dx + bfx^{s+n} z^t dx = o$;

on aura . . . . . $n = -1$

$s = -\frac{b}{a}$.

Soit encore . . . . . $m = r - 1$

& . . . . . $bp + apr + 1 = o$

$t = 1$

$f = 1$;

la transformée (*A*) ſera $(1+apr+bp).x^{r-1}dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+ax^{-\frac{b}{a}}dz+bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+cppx^{2r}dx + 2pczx^{r-\frac{b}{a}}dx+cz^2x^{-\frac{2b}{a}}dx=0$: & en réduiſant cette équation ſuivant les ſuppoſitions précédentes, elle devient (*B*) $cppx^{2r}dx+ax^{-\frac{b}{a}}dz+2cpx^{r-\frac{b}{a}}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}zzdx=0$, d'où l'on tire ce premier Théorême.

THÉOREME 1. Si l'équation $x^m dx+ady+byx^{-1}dx+cyydx=0$ eſt intégrable, l'équation $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}}dx+adz+2cpx^{m+1}zdx+cx^{-\frac{b}{a}}z^2dx=0$ eſt auſſi intégrable. Nous fournit trois Théorêmes.

DÉMONSTRATION. A cauſe de $r=m+1$ & $t=1$ $s=-\frac{b}{a}$ la ſuppoſition de $y=px^r+fx^sz^t$ devient ici $y=px^{m+1}+x^{-\frac{b}{a}}z$; ce qui donne la transformée ſuivante $(bp+amp+ap+1).x^m dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz+bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+cppx^{2m+2}dx + 2cpzx^{m+1-\frac{b}{a}}dx+czzx^{-\frac{2b}{a}}dx=0$; mais à cauſe de $r=m+1$, la ſuppoſition précédente de $bp+apr+1=0$, ſe change en $bp+amp+ap+1=0$; multipliant de plus toute l'équation par $x^{\frac{b}{a}}$, & effaçant

ce qui se détruit, on a $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}}dx + adz + 2cpzx^{m+1}dx + czzx^{-\frac{b}{a}}dx = 0$. Donc, &c. C'est ce qu'on trouveroit de même en mettant dans l'équation (B) pour r sa valeur $m+1$.

En supposant toujours . . . . . $s = -\frac{b}{a}$

$n = -1$

$f = 1$

$t = 1$

Soit encore . . . . . $r = -1$

$cp + b - a = 0$

la transformée générale (A) devient l'équation suivante $x^m dx + cppx^{-2}dx + bpx^{-2}dx - apx^{-2}dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}zzdx = 0$, qui devient à cause de l'hypothese de $cp + b - a = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2dx = 0$, d'où l'on tire ce second Théorême.

THÉOREME 2. Si l'équation $x^m dx + ady + bx^{-1}ydx + cyydx = 0$ est intégrable, l'équation $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2dx = 0$ l'est aussi.

Enfin en laissant toujours la supposition de $s = -\frac{b}{a}$

$n = -1$

$f = 1$

$t = 1$

faisant

faiſant de plus . . . . . $r = \frac{m}{2}$

$p = \sqrt{-\frac{1}{a}}$,

on trouvera de là même façon que ci-deſſus le Théorême ſuivant.

THÉOREME 3. Si l'équation $x^m dx + a dy + b y x^{-1} dx + c y y dx = 0$ eſt intégrable, l'équation $(apr + bp) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + a x^{-\frac{b}{a}} dz + 2cpz x^{\frac{m}{2}-\frac{b}{a}} dx + czz x^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$, qui eſt ſa transformée en ſuppoſant $y = p x^{\frac{m}{2}} + x^{-\frac{b}{a}} z$, l'eſt auſſi.

CXXVIII.

SCHOLIE 1. Les trois Théorêmes précédents nous donnent trois équations dont l'intégration dépend de celle de $x^m dx + a dy + b y x^{-1} dx + c y y dx = 0$; mais nous prouverons dans le Théorême 7 ſuivant que cette équation, lorſque $b = 2a$, eſt intégrable dans les mêmes cas que celle de Ricati. Donc les trois équations $cpp x^{2m+4} dx + a dz + 2cpz x^{m+1} dx + c x^{-2} z^2 dx = 0$, $x^m dx + a x^{-2} dz + 2cpz x^{-3} dx + c z^2 x^{-4} dx = 0$, & $(apr + 2ap) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + a x^{-2} dz + 2cpz x^{\frac{m}{2}-2} dx + c z^2 x^{-4} dx = 0$, ſont auſſi intégrables dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

CXXIX.

Seconde ſuppoſition qui donne auſſi trois Théorêmes.

Soit maintenant $afs x^{s-1} z^t dx + 2cpf x^{r+s} z^t dx = 0$,

ce qui donne . . . . . $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a}$$

Soit auſſi . . . . . $cp = a$,

ce qui donne . . . . . $s = -2$

& ſoit encore . . . . . $n = m+1$;

$$p = -\frac{1}{b}$$

f & $t = 1$,

on trouvera le Théorême ſuivant.

THÉOREME 4. En général toutes les équations $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx - aby^2 dx = 0$ ſont intégrables.

DÉMONSTRATION. La ſubſtitution qu'il faut faire dans le cas préſent eſt celle-ci, $y = px^{-1} + x^{-2} z$; mettant les valeurs qu'elle fournit pour y & dy dans l'équation précédente, elle devient $x^m dx - apx^{-2} dx - 2cpzx^{-3} dx + ax^{-2} dz + bpx^m dx + bzx^{m+1} dx - abp^2 x^{-2} dx - 2abpzx^{-3} dx - abx^{-4} z^2 dx = 0$. Subſtituant dans cette équation pour p ſa valeur $-\frac{1}{b}$, ſuivant l'hypotheſe de $cp = a$, & effaçant ce qui ſe détruit, on aura pour transformée l'équation ſuivante, $adz + bzx^{m+1} dx - abz^2 x^{-2} dx = 0$, qui s'integre par la méthode générale du Chapitre VII.

Suppoſant encore . . . . . $r = -1$

$ep = a$

$s = -2$

$n = m+1$

f & $t = 1$,

on découvre la propoſition ſuivante.

THÉOREME 5. Si l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyy dx = 0$ eſt intégrable, la ſuivante, $(bp+1).x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + cx^{-4} z^2 dx = 0$, qui eſt ſa transformée, en ſuppoſant $y = px^{-1} + x^{-2} z$, l'eſt auſſi. Or nous venons de voir (Théorême 4.) qu'on ſéparoit les indéterminées dans l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = 0$, lorſque $c = -ab$; donc on les ſéparera de même dans l'équation $(bp+1).x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} zdx + czzx^{-4} dx$; ce qui eſt évident, puiſque la ſuppoſition de $c = -ab$, donne $abp + a = 0$, & par conſéquent $bp + 1 = 0$. Donc on aura $ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + czzx^{-4} dx = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Suppoſant toujours . . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$

f & $t = 1$

& faiſant . . . . . $m = -2$

$cpp - ap + 1 = 0$

on trouvera le Théorême ſuivant.

THÉOREME 6. Si l'équation $x^{-2} dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$ eſt intégrable; l'équation $bpx^{n-1} dx + ax^{-\frac{2cp}{a}} dz + bx^{n-\frac{2cp}{a}} z dx + cx^{-\frac{4cp}{a}} zz dx = 0$ l'eſt auſſi. On démontrera cette propoſition à peu près de la même façon que les précédentes.

CXXX.

Troiſieme ſuppoſition. Soit enfin cette autre ſuppoſition, $bfx^{s+n}z^s dx + 2cpfx^{r+s}z^s dx = 0$, on en tire . . $r = n$

$$p = -\frac{b}{2c}$$

Soit auſſi . . . . . $n = -1$

$$s = 1$$

$$t = 1$$

& . . . . . $cpp + bp - ap = 0$,

ce qui donne . . . . . $b = 2a$,

on trouvera la propoſition ſuivante.

Fournit trois nouveaux Théorêmes. THÉOREME 7. $x^m dx + ady + bax^{-1}ydx + cyydx = 0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

DEMONSTRATION. Mettant dans la transformée générale (A) pour r, pour n & pour s leurs valeurs, & ſuivant la condition de $cpp + bp - ap = 0$; elle devient $x^m dx + azdx + bzdx + axdz + 2cpzdx + cz^2x^2dx = 0$. Mais à cauſe de $p = -\frac{b}{2c}$, cette équation ſe change en la ſuivante $x^m dx + azdx + axdz + cz^2x^2dx = 0$; & enfin en faiſant $xz = u$, on a $x^m dx + adu + cuudx = 0$ qui eſt l'équation même de Ricati.

En ſuppoſant toujours . . . . . $r = n$

$$p = \frac{-b}{2c},$$

& ſuppoſant de plus . . . . . $n - 1 = m$

$$apr + 1 = 0,$$

on tire des ſuppoſitions précédentes . . $c = \frac{-b}{2p}$

& . . . . . $p = -\frac{1}{ar} = \frac{-1}{am+a}$.
Donc $c = \frac{abm+ab}{2}$. Ces conditions nous donnent le Théorême ſuivant.

THE'OREME 8. L'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + \left\{\frac{abm+ab}{2}\right\} . yydx = 0$ s'integre dans les mêmes cas que ceux dans leſquels on peut intégrer l'équation de Ricati.

DE'MONST. Subſtituant dans la transformée générale (A) pour r, s, n leurs valeurs, & effaçant ce qui ſe détruit, elle ſe change dans l'équation ſuivante, $azdx + axdz - \frac{bb}{4c} x^{2m+2} dx + cz^2 x^2 dx = 0$; & en faiſant $xz = u$, $\frac{-bb}{4c} = B$, on aura $Bx^{2m+2} dx + adu + cu^2 dx = 0$, qui eſt l'équation de Ricati.

THE'OREME 9. Si on ne ſuppoſe pas $apr + 1 = 0$, on trouvera qu'en général ſi $x^m dx + udy + byx^{m+1} dx + cyydx = 0$ eſt intégrable, alors $(cpp + bp) . x^{2m+2} dx + (apr + 1) . x^m dx + adu + cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. C'eſt ce qui eſt évident par l'inſpection ſeule de la transformée générale (A), en y mettant ſeulement pour r, s, & n leurs valeurs, & en y faiſant $xz = u$.

CXXXI.

SCHOLIE 2. En ſuppoſant $x^m dx + ady = fdz$, ce qui donne . . . . $\frac{x^{m+1}}{m+1} + ay = fz$

& . . . . . $y = \frac{fz - \frac{x^{m+1}}{m+1}}{a}$,

Autre transformation dont on peut encore ſe ſervir.

l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$

Equation transformée. devient $(X)\ fdz + \frac{bfzx^n dx}{a} - \frac{bx^{m+1+n}dx}{m+1} + \frac{cf^2z^2dx}{aa} - \frac{2cfzx^{m+1}dx}{a(m+1)} + \frac{cx^{2m+2}dx}{(m+1)^2} = 0$.

CXXXII.

Premiere ſuppoſition pour cette équation. Suppoſant 1°. dans la transformée $(X) - \frac{bx^{m+1+n}dx}{a.(m+1)} + \frac{cx^{2m+2}dx}{aa.(m+1)^2} = 0$, ou bien $cx^{2m+2}dx = (m+1).abx^{m+1+n}dx$, on en tire .... $c = (m+1).ab$

$m = 1$

$n = 2$;

ce qui donne le Théorême ſuivant.

Nous donne un Théorême. THE'OREME 10. $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx + (m+1).aby^2dx = 0$ eſt intégrable. Car par les ſuppoſitions précédentes la transformée générale (X) devient $a^2fdz - (m+1).abzx^{m+1}dx + (m+1).fcz^2dx = 0$, équation dans laquelle les indéterminées ſe ſéparent par la méthode du Chapitre VII.

CXXXIII.

Seconde ſuppoſition qui donne auſſi un Théorême. 2°. Suppoſant $\frac{bfzx^n dx}{a} - \frac{2cfzx^{m+1}dx}{aa.(m+1)} = 0$, on en tire $n = m+1$; $c = \left\{\frac{m+1}{2}\right\}.ab$, ce qui nous donne le Théorême ſuivant.

THE'OREME 11. $x^m dx + ady + byx^{m+n}dx +$

$\left\{\frac{m+1}{2}\right\} . aby^2 dx = 0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que $x^{2m+2} dx + adz + cz^2 dx = 0$; comme on l'a trouvé déja ci-deſſus dans le Théorême 8. C'eſt ce qui eſt évident en obſervant dans la transformée (X) les conditions que donne la ſuppoſition précédente.

CXXXIV.

SCHOLIE 3. Si l'on fait dans l'équation $x^m dx +$ Dernier cas d'intégration de la formule $ady + byx^n dx + cyy dx = 0$, ... $n = 0$

s & $t = 1$,

la transformée générale (A) devient (F) $x^m dx + apr x^{r-1} dx + afz dx + afx dz + bpx^r dx + bfxz dx + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+1} z dx + cffx^2 z^2 dx = 0$.

CXXXV.

Soit maintenant dans cette derniere équation $bfxz dx + 2cpfx^{r+1} z dx = 0$, on en tire . . $r = 0$

$p = -\frac{b}{2c}$.

Soit auſſi . . . . . $f = 1$.

En effaçant ce qui eſt multiplié par zéro & ce qui ſe détruit dans l'équation (F), on a $x^m dx + az dx + axdz - \frac{bb}{4c} dx + cx^2 z^2 dx = 0$; & enfin en faiſant $xz = u$, on a $x^m dx + adu - \frac{bb}{4c} dx + cu^2 dx = 0$; ce qui nous donne le Théorême ſuivant.

THÉOREME 12. Si $x^m dx + ady + bydx + cyy dx = 0$ eſt intégrable, (B) $x^m dx - \frac{bb}{4c} dx + adu +$

$cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. Donc réciproquement la premiere pourra être intégrée dans tous les cas où l'on integrera cette derniere.

On trouve, par exemple, que ſi $m = 2$ & $\frac{b^4}{16caa} = -1$, cette derniere équation (B) eſt intégrable. Car ſoit dans cette équation, $u = \frac{z}{a} + \frac{bbx}{4ac}$, on aura la transformée ſuivante $x^2 dx - \frac{bb}{4c} dx + dz + \frac{bbdx}{4c} + \frac{czzdx}{aa} + \frac{bbzxdx}{2aa} + \frac{b^4 x^2 dx}{16aac} = 0$. Or cette équation dans l'hypotheſe de $\frac{b^4}{16caa} = -1$ ſe réduit à la ſuivante $2aadz + bbzxdx + 2cz^2 dx = 0$, dans laquelle on ſépare les indéterminées. Donc (B) eſt intégrable dans le cas préſent. D'où il faut conclure que $x^2 dx + ady + bydx - \frac{b^4 y^2 dx}{16aa} = 0$ l'eſt auſſi.

CXXXVI.

Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes.

REMARQUE. Outre l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$, nous pouvons auſſi chercher les cas d'intégrabilité des deux équations

$$x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$$

& $x^m dx + ady + bx^n dy + cyydx = 0$,

qui ne different non plus de l'équation de Ricati que par un ſeul terme.

CXXXVII.

Examen de la premiere.

Soit donc 1°. $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$, l'équation à intégrer : faiſons $y = px^r + fx^s z^t$, nous aurons $dy = rpx^{r-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz + fsz^t x^{s-1} dx$, & pour transformée l'équation ſuivante, (D) $x^m dx +$

$bx^n dx$

$bx^n dx + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0.$

Soit $afsx^{s-1} z^t dx + 2cfpx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . . $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a}.$$

Soit . . . . . $cp = a$

$$t = 1,$$

on trouvera . . . . . $f = 1.$

THÉOREME 13. Si l'équation $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ eſt intégrable, la ſuivante $x^m dx + bx^n dx + ax^{-2} dz + cx^{-4} z^2 dx = 0$ l'eſt auſſi ; puiſque c'eſt ſa transformée en faiſant $y = \frac{ax^{-1}}{c} + x^{-2} z.$

THÉOREME 14. Soit encore . . $r = -1.$

$$s = -\frac{2cp}{a},$$

& de plus ſoit . . . . . $m = -2$

& . . . . . $-ap + cpp + 1 = 0;$

on pourra intégrer l'équation $x^{-2} dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ dans le cas où l'on peut intégrer la ſuivante $bx^n dx + afx^s dz + cffx^{2s} z^2 dx = 0$; ce qui eſt évident, puiſque c'eſt ſa transformée en faiſant $y = px^{-1} + x^{-1} z$, & effaçant ce qui ſe détruit par la ſuppoſition de $cpp - ap + 1 = 0.$

THÉOREME 15. Soit maintenant $x^m dx + aprx^{r-1} dx = 0$, on en tire . . . . . $r = m + 1$

$$apr = -1.$$

Soit de plus . . . . . $cpp + b = 0$

$$n = 2m + 2$$

$$f = 1$$
$$t = 1$$
$$s = 1.$$

La transformée générale (D) devient ici $x^m dx + bx^{2m+2} dx + (m+1).apx^m dx + azdx + axdz + cppx^{2m+2} dx + 2cpx^{m+2} zdx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui ſe réduit par les ſuppoſitions précédentes à $azdx + axdz + 2cpx^{m+2}.zdx + cz^2 x^2 dx = 0$; qui eſt intégrable par la méthode du Chapitre VII.; ce qui eſt évident en mettant l'équation ſous cette forme $axdz + (a + 2cpx^{m+2}) zdx + cz^2 x^2 dx = 0$. D'où il ſuit que l'équation $x^m dx + bx^{2m+2} dx + ady - (m+1)^2 aaby^2 dx = 0$ eſt intégrable.

CXXXVIII.

Examen de la ſeconde équation.

2°. Examinons maintenant la formule $x^m dx + bx^n dy - ady + cyydx = 0$: faiſons $y = px^r + fx^s z^t$; on aura pour transformée l'équation ſuivante (Y) $x^m dx + bprx^{r+n-1} dx + bfsx^{n+s-1} z^t dx + bftx^{s+n} z^{t-1} dz + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0$.

Suppoſons maintenant $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on aura

$$r = -1$$
$$s = -\frac{2cp}{a}.$$

Soit

$$cp = a$$
$$n = m+2$$
$$bp - 1 = 0,$$

on en conclura,

THE'OREME 16. que $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + aby^2 dx = 0$ eſt intégrable.

DEMONST. Car par les conditions précédentes la transformée générale (Y) devient ici $x^m dx - bpx^m dx - 2bzx^{m-1} dx + bx^m dz - apx^{-2} dx - 2ax^{-3} zdx + ax^{-2} dz + abppx^{-2} dx + 2abpx^{-3} zdx + abx^{-4} z^2 dx = 0$; laquelle, après les réductions que donne la ſuppoſition de $bp - 1 = 0$, devient étant multipliée par xx, $(a + bx^{m+2}) . dz - 2bzx^{m+1} dx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre méthode générale du Chapitre VII.

Soit enſuite $bfsx^{n+s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . . $r = n - 1$

$$s = -\frac{2cp}{br}.$$

Soit à préſent . . . . $cp + br = 0$

f & $t = 1$

$m = n - 2$

$apr + 1 = 0$, on aura $s = 2$,

Ces ſuppoſitions nous donnent le Théorême ſuivant.

THE'OREME 17. $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + (m+1)^2 . aby^2 dx = 0$ eſt intégrable. Car ſubſtituant dans la transformée générale (Y) pour r, n, s, f, t, leurs valeurs, faiſant les réductions qu'amenent les ſuppoſitions de $cp + bm + b = 0$, & de $apm + ap + 1 = 0$, on aura l'équation ſuivante $(ax^2 + bx^{m+4}) . dz + 2axzdx + (m+1)^2 . abz^2 x^4 dx = 0$. Donc, &c.

CXXXIX.

REMARQUE. Il eſt bon d'obſerver ici qu'une équation $x^m dx + by^n x^p dx + cx^s y^r dy + ady = 0$, ou $x^m dx + ady + by^n x^p dx + cy^r dx = 0$, ne peut être changée par transformation en une autre de la même forme, & dont les coefficiens ſoient tous trois donnés. Il ne peut y avoir que deux de ces coefficiens de donnés. La raiſon en eſt qu'en faiſant $x = fu$, $y = gz$, on formera trois équations différentes, quoiqu'on n'ait que deux inconnues f, g.

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manquent.

CXL.

Procédé de la méthode.

TOute équation différentielle à deux variables, à quelque degré que les dx & les dy y ſoient élevées, ſe conſtruit toujours lorſque l'une des deux indéterminées finies y manque. La méthode qu'il faut ſuivre dans ce cas,

Quelle eſt la ſubſtitution qu'elle employe.

conſiſte à faire $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ſi c'eſt x qui manque, ou $dy = \frac{z\,dx}{a}$ ſi c'eſt y qui manque. (z eſt une nouvelle indéterminée, & a une conſtante quelconque.) Car par

cette ſubſtitution, en mettant, par exemple, $\frac{z\,dy}{a}$ au lieu de dx dans la propoſée, il eſt évident qu'on aura une transformée toute diviſible par une puiſſance de dy qui ſe trouvera la même par-tout, & par conſéquent que la transformée ſera toute compoſée de quantités finies. On aura auſſi la valeur de z en y & en conſtantes, & la raiſon d'y à z, ſera exprimée par une équation ou par une courbe algébrique. Mettant donc dans l'équation $dx = \frac{z\,dy}{a}$ pour dy ſa valeur trouvée par le procédé précédent, les indéterminées ſeront ſéparées.

Application de la méthode à quelques exemples.

Pour faire mieux ſentir l'eſprit de cette méthode, appliquons-la à quelques exemples.

CXLI.

Premier exemple.

Soit l'équation $y\,dy^3\,dx = a\,dx^4 + 2\,a\,dx^2\,dy^2 + a\,dy^4$, dans laquelle il ne ſe trouve aucune dimenſion finie de x. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = \frac{z\,dy}{a}$; $dx^2 = \frac{z\,z\,dy^2}{a\,a}$; $dx^4 = \frac{z^4\,dy^4}{a^4}$. Mettant ces valeurs de dx, dx^2, dx^4 dans la propoſée, j'ai la transformée ſuivante. $\frac{z\,y\,dy^4}{a} = \frac{z^4\,dy^4}{a^3} + \frac{2\,z\,z\,dy^4}{a} + a\,dy^4$, c'eſt-à-dire, en diviſant par dy^4 qui eſt commun à tous les termes $\frac{z\,y}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2\,z\,z}{a} + a$; de cette équation je tire aiſément la valeur de $y = \frac{z^3}{a\,a} + 2\,z + \frac{a\,a}{z}$; & celle de $dy = \frac{3\,z^2\,dz}{a\,a} + 2\,dz - \frac{a\,a\,dz}{z\,z}$: donc $\frac{z\,dy}{a} = dx = \frac{3\,z^3\,dz}{a^3} + \frac{2\,z\,dz}{a} - \frac{a\,dz}{z}$. J'integre cette équation. Son intégrale eſt $x - \frac{3\,z^4}{4\,a^3} - \frac{z\,z}{a} + a\,lz + C = 0$.

On a donc la valeur des deux coordonnées x & y de la propoſée par le moyen de deux courbes qui ont une indéterminée commune z.

Figure 5. Ayant donc pris les abſciſſes z ſur l'axe AB, je décris la courbe DEC de l'équation $y = \frac{z^2}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & la courbe NLM de l'équation $x - \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + alz + C = 0$. . . . . $BC = y$

$BM = x$

ſeront les coordonnées de la courbe différentielle propoſée.

Pour la conſtruire je mene KO parallele à BM, je prolonge MO en Q, enſorte qu'on ait toujours $OQ = BC$, & QPR ſera la courbe cherchée.

CXLII.

Second exemple. Soit encore l'équation $y^3 dx^5 + aaydydx^4 = a^3 dy^5$. Je fais $dx = \frac{zdy}{a}$, & après les mêmes ſubſtitutions que dans l'exemple précédent, il me vient ici $\frac{y^3 z^5 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 ydy^5}{a^4} = a^3 dy^5$, & en réduiſant $y^3 z^5 + a^3 yz^4 = a^8$.

Figure 6. Pour avoir la courbe de l'équation différentielle propoſée, ſur l'axe DH, je conſtruis la courbe EF de l'équation $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$; CD étant $= y$, & $CF = z$. Sur FC prolongée je prends CA égal à l'eſpace $DCFE$ diviſé par a: on aura donc $CA = \int \frac{zdy}{a} = x$, & le point A appartient à la courbe cherchée.

CXLIII.

SCHOLIE. Cette méthode eſt, comme on le voit,

assez étendue, d'autant plus qu'elle s'applique, comme nous le dirons dans la suite, aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier degré. M. d'Alembert en donne une encore plus générale dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1748. Sa méthode a deux avantages. 1°. Elle ne suppose pas qu'une des deux indéterminées manque dans l'équation. 2°. Elle mene tout de suite à l'intégration. Nous allons l'expliquer dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer plusieurs équations différentielles dans lesquelles dx *&* dy *sont élevées à différentes puissances.*

CXLIV.

DEMANDE. NOus supposerons toujours dans ce Chapitre $z = \frac{dx}{dy}$, & il ne faut pas oublier que $\frac{dx}{dy}$ est une quantité finie, comme nous l'avons dit Article XXXIV.

CXLV.

AVERTISSEMENT. La supposition qu'on fait ici de $\frac{dx}{dy} = z$, donne $dz = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^2}$; par conséquent, comme dans les deux méthodes pour lesquelles la présente supposition a lieu, dz se rencontre assez souvent, il

ſembleroit que ces méthodes appartiennent aux différentielles du ſecond ordre. Cependant nous avons cru devoir les traiter ici, parce que dz y eſt ſous une forme de différentielle du premier degré.

CXLVI.

Conditions qu'exige cette méthode.

PROBLEME 1. Trouver l'intégrale d'une équation différentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de dx & de dy, & dans laquelle x & y ſe trouvent, pourvu qu'ils ne ſoient ni multipliés ni diviſés l'un par l'autre, ni élevés à aucune puiſſance plus grande que l'unité.

Formule des équations auxquelles on la peut appliquer.

SOLUTION. Ces ſortes d'équations peuvent ſe repréſenter par la formule $x = y\varphi z + \Delta z$ (φz & Δz marquant des fonctions quelconques de z, c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{dy}$).

Procédé de la méthode appliquée à cette formule.

Je commence par différentier cette formule, j'ai $dx = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou mettant pour dx ſa valeur zdy, on a $zdy = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou $dy(\varphi z - z) + yd(\varphi z) + d(\Delta z) = 0$. Donc $dy + \frac{yd(\varphi z) + d(\Delta z)}{\varphi z - z} = 0$, équation qui eſt dans le cas de la méthode de M. Bernoulli que nous avons expliquée dans le Chapitre VII., & de laquelle on tire aiſément la valeur de y en z; car en prenant c pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a $yc^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} + \int \frac{d(\Delta z)}{\varphi z - z} \times c^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} = A$. ($A$ eſt une conſtante quelconque ajoutée pour rendre l'intégrale complete.) Par conſéquent on trouvera auſſi la valeur de x, puiſque $dx = zdy$, & $x = \int zdy$.

CXLVII.

CXLVII.

COROLLAIRE. Si $x = y\varphi z$, c'eſt le cas des équations homogenes que nous avons appris à intégrer dans le Chapitre V. Il eſt cependant pris ici dans un autre ſens que celui des équations homogenes de M. Bernoulli. Car ici on a $\frac{x}{y} = \varphi z = \varphi \frac{dx}{dy}$, au lieu que dans le cas de M. Bernoulli on a $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. Quoique ces deux cas rentrent l'un dans l'autre, cependant il ſeroit quelquefois fort difficile de ramener le premier au ſecond; c'eſt-à-dire, de tirer de $\frac{x}{y} = \varphi \frac{dx}{dy}$, l'équation $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. C'eſt pourquoi il étoit fort utile d'avoir une méthode particuliere pour chacun de ces deux cas. Celle que nous expliquons ici apprend en général à intégrer toute équation $x = y\varphi z$, φz étant une fonction quelconque de z, même avec des ſignes *ſ.*

Le cas des équations homogenes ſe réſout par cette méthode.

CXLVIII.

Néanmoins cette méthode ſuppoſe qu'on ait la valeur de $\frac{x}{y}$ en z; mais on peut par un autre moyen réſoudre encore plus généralement le cas préſent. Soit, comme dans tout ce Chapitre, $z = \frac{dx}{dy}$, & $x = yk$, (z & k étant deux nouvelles changeantes) la propoſée devient une équation algébrique quelconque entre z & k. Je conſtruis la courbe qui eſt le lieu de cette équation, & j'ai pour chaque z la correſpondante k, & *vice verſâ.* Or de ce que $x = yk$, & $dx = z\,dy$, il s'enſuit qu'on aura $z\,dy = y\,dk + k\,dy$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dk}{z-k}$; donc nous parviendrons à

Autre maniere plus générale de réſoudre le cas des équations homogenes.

trouver la valeur de y en conſtruiſant & en quarrant la courbe dont les abſciſſes ſont k, & dont les ordonnées ſont $\frac{1}{z-k}$.

CXLIX.

Auſſi bien que l'équation du Chap. Chap. VI. Art. XC.

COROLLAIRE 2. L'équation $gx\,dx + hy\,dx + f\,dx = ax\,dy + by\,dy + c\,dy$, pour laquelle nous avons donné une méthode particuliere, eſt auſſi un cas particulier du Problême précédent. En effet, cette équation eſt la même que la ſuivante $dx = \left\{\frac{ax+by+c}{gx+hy+f}\right\} dy$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$. Donc on a $z = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$: ou $zgx + zhy + zf = ax + by + c$; donc $zgx - ax = -zhy - fz + by + c$; donc $x = y\left\{-\frac{zh+b}{zg-a}\right\} + \frac{c-fz}{zg-a}$; donc enfin $x = y\varphi z + \Delta z$ qui eſt la formule du Problême. Donc la propoſée s'integrera par la même méthode que cette formule.

CL.

Application à une ſeconde formule.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ dans laquelle $z = \frac{dx}{dy}$, m, n, r, q, s, t marquent des nombres quelconques.

SOLUTION. Je fais $x^q y^s z^t = u$,

donc $x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{t}{q}}$,

$x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}$;

mais nous avons $x^m y^n z^r = \varphi u$, donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{x^m}$,

donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}} = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$.

Donc $y^n = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$, ou $y^{\frac{nq-ms}{q}} = (\varphi u) u^{-\frac{mi}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$. Donc enfin $y = (\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} \times u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$. Donc $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}$, (& en mettant pour $y^{-\frac{s}{q}}$ sa valeur,) $= (\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} \times u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$. Mais (Problême 1.) $dx = z\,dy$. Donc si on substitue les valeurs de dx & de dy dans cette derniere équation, on trouvera les conditions d'intégrabilité de la maniere suivante.

Cas d'intégration de cette formule.

CLI.

Suppoſant $(\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} . u^{-\frac{m}{nq-ms}} = V^q$, & $(\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} = V$ pour abréger le calcul. Nous aurons $x = V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, &

$y = V^q z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$.

Maniere de les trouver.

Donc à cauſe de l'équation $dx = z\,dy$, on a

$d\left\{V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}\right\} = z\,d\left\{V^q z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}\right\}$, c'eſt-à-dire,

$z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV^q + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V^q z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation qui eſt intégrable dans tous les cas ſuivants.

CLII.

Premier cas d'intégration.

1°. Si $tm - rq = 0$. Car alors on a $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z\,dV'$, équation qui eſt dans le cas de la Méthode du Chapitre VII.

De l'équation $tm - rq = 0$ on tire $\frac{t}{r} = \frac{q}{m}$, donc la propoſée devient $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{\frac{tm}{r}} z^{\frac{rq}{m}}$, & ſuppoſant $\frac{t}{r} = p$, on a $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{pm} z^{pr}$. Je fais $x^m z^r = k$, donc j'ai $k y^n = \varphi y^s k^p$, donc $k = \Delta y$; donc $x^m z^r = \Delta y$, équation facile à intégrer. La méthode que nous expliquons a l'avantage de fournir le moyen d'intégrer ces ſortes d'équations différentielles ſans chercher la valeur de $x^m z^r$ en y, ce qu'il ſeroit ſouvent impoſſible de trouver.

CLIII.

Second cas d'intégration de la même formule.

2. L'équation eſt intégrable dans le cas où $rs - nt = 0$. Car alors on a $V^{-1} dV = z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}+1} V'^{-1} dV' + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation encore conſtructible par la même méthode de M. Bernoulli, Chapitre VII.

L'équation $rs - nt = 0$ change la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^s$, en la ſuivante $x^m y^n z^r = \varphi (x^q y^{\frac{ns}{r}} z^{\frac{rs}{n}})$; d'où l'on tirera $y^n z^r = Tx$, en ſuivant la même opération que ci-deſſus.

CLIV.

3°. Si $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, alors l'équation ſera beaucoup plus ſimple que les précédentes. Car dans ce cas $\frac{tm-qr}{nq-ms} = \frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms} - 1 = \frac{rs-nt}{nq-ms} - 1$; donc notre derniere équation devient $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V^{-1} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V^{II-1} dV^{II} + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V^{II} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$, c'eſt-à-dire, $\frac{V^{-1} dV - V^{II-1} dV^{II}}{\left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V^{II} - \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V} = \frac{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz}{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}}$, équation qui eſt toute ſéparée. Troiſieme cas d'intégration.

Si dans le cas préſent on fait $t = 0$, $r = 1$, au lieu de l'équation de condition $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, on aura la ſuivante $nq - ms = q + s$. Dans ce cas la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^t$ devient $x^m y^n z = \varphi x^q y^s$. Donc en mettant pour z ſa valeur $\frac{dx}{dy}$, on a $x^m y^n \frac{dx}{dy} = \varphi x^q y^s$, ou $dx = x^{-m} y^{-n} dy \varphi(x^q y^s)$; Donc en ſuppoſant . . . . . $-m = p$, $-n = t$ toute équation de cette forme $dx = x^p y^t dy \varphi(x^q y^s)$ ſera intégrable ſi $-tq + ps = q + s$; ainſi l'équation $dx = \frac{ax}{y} dy \varphi(y^s x^q)$ eſt intégrable. Car on a en comparant terme à terme $p = 1$, $t = -1$: donc on a $-tq + ps = q + s$. De même dans l'équation $dx = dy \varphi(xy^s)$, $p = 0$, $t = 0$, $q = 1$; donc, &c.

CLV.

Celui des équations homogenes y eſt compris.

Le cas des équations homogenes de M. Bernoulli eſt renfermé dans l'équation génerale $-tq+ps=q+s$. Car ce cas peut ſe repréſenter, comme nous l'avons déja dit (Art. CXLVII.) par $\frac{dx}{dy}=\varphi\frac{x}{y}$, ou $dx=dy\varphi xy^{-1}$. Or comparant cette équation avec la formule de l'article précédent, on a . . . . . $p=0$; $t=0$

$q=1$; $s=-1$.

Donc $ps-tq=0$, & $q+s=0$; donc $-tq+ps=q+s$.

CLVI.

Par le même moyen on peut déterminer les conditions d'intégrabilité de l'équation $dx=a'x^my^n dy+px^ey^h dy+fx^gy^l dy+$ &c. Pour y parvenir, je fais $x^by^a=u$ (a & b ſont deux indéterminées.) J'ai donc $x=u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}}$; $dx=\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}du-\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}dy$; donc j'ai la transformée ſuivante $\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}du=\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}dy+a'u^{\frac{m}{b}}y^{-\frac{am}{b}+n}dy+pu^{\frac{e}{b}}y^{-\frac{ae}{b}+h}dy+fu^{\frac{g}{b}}y^{-\frac{ag}{b}+l}dy+$ &c. équation qu'on voit aiſément être intégrable, toutes les fois que $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n=-\frac{ae}{b}+h=-\frac{ag}{b}+l$. Or de l'équation $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n$, je tire $-\frac{a}{b}+\frac{ma}{b}=n+1$, donc $+\frac{a}{b}=\frac{n+1}{m-1}$; de même de l'équation $+\frac{a}{b}-1$

$= -\frac{ea}{b} + h$ on tire $-\frac{a}{b} + \frac{ea}{b} = h + 1$. Donc $\frac{a}{b} = \frac{h+1}{e-1}$ &c. Donc la propoſée eſt intégrable, toutes les fois que $\frac{n+1}{m-1} = \frac{h+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

CLVII.

4°. Enfin ſi $nq - ms = 0$, on a $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{sm}{q}} z^{-\frac{em}{q}}$. Donc la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi u$, devient $u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{nq-ms}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$ ou $u^{\frac{m}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$, & l'équation propoſée s'integre toutes les fois que $n = -m$, & $q = -s$, ce qui rentre dans le cas des équations homogenes.

Quatrieme & dernier cas d'intégration de la même formule.

CLVIII.

REMARQUE. On ne retrouvera que les mêmes équations de condition, ſoit qu'on tire de l'équation différentielle propoſée les valeurs de y & de z, ou de x & de z.

CLIX.

PROBLEME 3. Trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \varphi (y^p z^n) + \Delta (y^p z^n)$.

Recherche des cas d'intégration d'une troiſieme formule.

1°. Je ſuppoſe $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$; or $z = \frac{dx}{dy}$, donc $\frac{dx}{dy} = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$: donc $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. On a auſſi $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, donc $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}}$, donc on a la transformée $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}} \varphi u + \Delta u$.

Nommant $u^{\frac{r}{n}} \varphi u$, V, j'ai $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V y^{k-\frac{pr}{n}} + \Delta u)$, par où il m'eſt facile de voir que l'équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli expliqué (Ch. VII.) ſi $-\frac{p}{n}+1 = k-\frac{pr}{n}$.

2°. Si on fait encore $y^p z^n = u$, & qu'on en tire $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} u^{\frac{1}{p}} dz$: on aura $dx = z dy = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. D'ailleurs $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r}$, donc $x = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r} \varphi u + \Delta u$.

Je nomme $u^{\frac{k}{p}} \varphi u$, V': j'ai donc dx, ou $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}+r} dV' - \left\{\frac{nk}{p} - r\right\} V' z^{-\frac{nk}{p}+r-1} dz + d(\Delta u)$. Or ſi $-\frac{n}{p}+1 = -\frac{nk}{p}+r$, on aura $-\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p}+r-1$; donc l'équation précédente devient $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - z^{-\frac{n}{p}+1} V'^{-1} dV' - d\Delta u = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}} dz - \left\{\frac{n}{p} - 1\right\} V' z^{-\frac{n}{p}} dz$, ou bien $z^{-\frac{n}{p}} dz \times \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} + \left\{1 - \frac{n}{p}\right\} V' + z^{-\frac{n}{p}+1} du \times \left\{V'^{-1} \frac{dV'}{du} - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}\right\} - d\Delta u = 0$. Or on voit bien que cette équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli, de même que l'équation de l'article précédent.

CLX.

CLX.

COROLLAIRE. Si la propoſée étoit $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + y^{k'} z^{r'} \Delta(y^p z^n) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^p z^n) +$ &c. je ferois comme ci-deſſus $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$, donc $dx = z\,dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Donc $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}+k} \varphi u + u^{\frac{r'}{n}} y^{-\frac{pr'}{n}+k'} \Delta u + u^{\frac{r''}{n}} y^{-\frac{pr''}{n}+k''} \Gamma u +$ &c.) Donc la propoſée ſera intégrable, lorſqu'on aura $-\frac{p}{n}+1 = -\frac{pr}{n}+k = -\frac{pr'}{n}+k' = -\frac{pr''}{n}+k''$, ou en faiſant le même calcul que dans l'Article CLIX. lorſqu'on aura $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorſque k' & r', ou k'' & r'' &c. ſont égaux à zéro.

CLXI.

REMARQUE. Toutes les méthodes que nous avons expliquées dans ce Chapitre pour les équations différentielles à deux variables du premier ordre, s'étendent auſſi à celles d'un genre plus élevé. C'eſt ce que nous ferons voir dans la ſuite.

CLXII.

SCHOLIE GÉNÉRALE. La méthode dont nous avons donné un eſſai (Art. CXLVIII.) peut s'étendre à toutes les équations dans leſquelles faiſant $y^p z^q = k$, on a une équation entre x & k. En effet on commencera par conſtruire l'équation entre x & k, puis on obſervera que $y^{\frac{p}{q}} z =$

$k^{\frac{1}{q}}$, ou en mettant pour z ſa valeur $\frac{dx}{dy}$, que $y^{\frac{p}{q}} dx = k^{\frac{1}{q}} dy$, ou bien $k^{-\frac{1}{q}} dx = y^{-\frac{p}{q}} dy$. Or il eſt évident que pour chaque x on a une valeur de k; donc on aura auſſi pour chaque x une valeur de y correſpondante.

CHAPITRE XIV.

Autre Méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CLXIII.

Procédé de cette Méthode.

LA Méthode que nous allons expliquer ici conſiſte à préparer l'équation $dx = z\,dy$, ou $dx - z\,dy = 0$ de telle façon qu'on la puiſſe diviſer en deux parties, dont l'une ſoit intégrable, & dont l'autre ſoit ou puiſſe devenir une différentielle exacte multipliée par une quantité quelconque. Enſuite on multipliera la premiere partie par une fonction de ſon intégrale, & on ſuppoſera que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la différentielle dans la ſeconde partie ſoit égal à une fonction de l'intégrale de la différentielle contenue dans cette ſeconde partie. On aura par ce moyen une équation de condition qui rend la propoſée intégrable.

CLXIV.

Application de cette Méthode.

Je mets l'équation $dx - z\,dy = 0$ ſous la forme ſuivante $dx - z\,dy - y\,dz + y\,dz = 0$: je multiplie cette derniere équation par une fonction X de x, & j'y ajoute $zy\,dX - zy\,dX$, ce qui ne la change pas ; j'aurai $X\,dx - Xz\,dy - Xy\,dz - zy\,dX + yX\,dz + zy\,dX = 0$, ou bien $X\,dx - Xz\,dy - Xy\,dz - zy\,dX = -yX\,dz - zy\,dX$. Or le premier membre de cette équation eſt intégrable ; ſon intégrale eſt $\int X\,dx - yzX$. Le ſecond membre eſt la différentielle de $-zX$, multipliée par y. En ſuivant donc le procédé qu'indique notre méthode, je multiplie le premier membre $X\,dx - Xz\,dy - Xy\,dz - yz\,dX$ par une fonction de ſon intégrale, & je ſuppoſe que le produit de cette fonction, par la quantité y qui multiplie la différentielle dans le ſecond membre, eſt égal à une fonction de zX. De cette hypotheſe je tire le Théorême ſuivant.

CLXV.

THÉOREME. L'équation propoſée eſt intégrable ſi $y\varphi(\int X\,dx - Xyz) = r\,zX$.

Car en pratiquant les opérations indiquées ci-deſſus, la propoſée devient $\{X\,dx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int X\,dx - Xyz) = -d(Xz) \times y\varphi(\int X\,dx - Xyz)$ qui ſe change par la ſuppoſition précédente en $\{X\,dx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int X\,dx - Xyz) = -d(Xz) \cdot r(Xz)$, équation qu'on voit bien être intégrable.

CLXVI.

On peut encore exprimer ce Théorême de la façon suivante : l'équation $Xdx - d(Xyz) = -yd(Xz)$ est intégrable, si $\int Xdx - Xyz$ est égale à une fonction de $y\Delta(Xz)$.

Car de ce que $\int Xdx - Xyz = \varphi y\Delta(Xz)$, il s'ensuit que $y\Delta(Xz) = \Gamma(\int Xdx - Xyz)$: donc $\frac{1}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{1}{y\Delta(Xz)}$: donc en multipliant les deux membres de notre équation par ces deux quantités égales, on aura $\frac{Xdx - d(Xyz)}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{-d(Xz)}{\Delta(Xz)}$, équation intégrable.

CLXVII.

Premier exemple.

COROLLAIRE. Donc l'équation $\int Xdx = pyXz + qyX^n z^n + a$ est intégrable, p, q & a sont des constantes. En effet il est évident que cette équation peut se mettre sous la forme suivante $\int Xdx - yzX = pyzX - yzX + qyX^n z^n + a$, ou $\int Xdx - yzX = y.(pXz - Xz + qX^n z^n) + a = y\Delta(Xz) + a$.

Maintenant on voit que pour intégrer cette équation, il ne s'agit que de construire une courbe dont les coordonnées soient x & y. Soit . . . . $Xz = r$

$$\int Xdx - yr = k$$

$$k = u + a$$

on aura . . . . . $k - a = y\Delta r$

& par conséquent . . . . . $y\Delta r = u$.

La ſuppoſition de $k = u + a$ nous donne $dk = du$. Mais ſuivant le Théorême précédent on a dans ce cas-ci $X dx - d(Xyz) + y d(Xz) = 0$: donc on aura $dk + y dr = 0$, & $du + y dr = 0$: donc enfin en mettant pour y ſa valeur $\frac{u}{\Delta r}$, il nous vient $\frac{du}{u} + \frac{dr}{\Delta r} = 0$, équation facile à conſtruire & qui nous donne la valeur de y en u ou en r. y étant ainſi trouvée, cherchons x. Les ſuppoſitions précédentes nous donnent $\int X dx - yr = u + a$. Soit $u + yr + a = t$, on aura $\int X dx = t$. Je conſtruis une courbe BM, dans laquelle $PM = X$ Figure 7. $AP = x$, l'aire de cette courbe ou $ABMP$ ſera $= \int X dx = t$. Je prends AB pour l'unité, & je ſuppoſe $PQ = \frac{PMBA}{AB} = \int \frac{X dx}{1} = t$, QR ſera l'x cherchée.

CLXVIII.

Soit propoſée l'équation $x + Z + a = \frac{yyz dz}{2 dZ} + \frac{z dZ}{2 dz}$, a eſt une conſtante, & Z une fonction de z, c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{dy}$. Second exemple.

Je commence par donner à cette équation la forme ſuivante $x - yz + Z + a = \frac{z dz}{2 dZ} \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)^2$ qu'on voit clairement être la même équation que la propoſée. Donc en prenant la racine quarrée des deux membres, on aura $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{z dz}{2 dZ}}$. Mais par l'hypotheſe $z = \frac{dx}{dy}$, donc $dx - z dy = 0$, & par conſéquent $dx - z dy - y dz + dZ + y dz -$

$dZ = 0$; donc $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} = \frac{-ydz + dZ}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}\sqrt{\frac{zdz}{zdz}}}$ $= \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}\sqrt{\frac{zdz}{zdZ}}}$; donc enfin $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}}$ $= \frac{-dz}{\sqrt{\left\{\frac{zdz}{zdZ}\right\}}}$. J'ai donc en intégrant $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \frac{1}{2}\int \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{zdZ}}}$. Si on combine cette équation avec la propoſée, on en tirera la valeur de x ou de y en z, ce qui donne le Théorême ſuivant.

CLXIX.

THÉOREME. Toutes les équations dans leſquelles $x - yz + Z + a = \varphi\left\{\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\Gamma z\right\}$, ſont intégrables.

DÉMONSTRATION. Puiſque $x - yz + Z + a = \varphi\left\{\left(y - \frac{dZ}{dz}\right).\Gamma z\right\}$, on aura $\varphi'(x - yz + Z + a) = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \times \Gamma z$; & diviſant par $\varphi'(x - yz + Z + a)$ l'équation $dx - zdy - ydz + dZ = -(ydz - dZ)$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}.\Gamma z} = dz\Delta z$; équation dont on voit aiſément que chaque membre eſt intégrable.

CLXX.

REMARQUE. On peut au lieu de $dx - zdy = 0$, mettre $dy - \frac{dx}{z} = 0$: alors il faudra ſubſtituer y à x,

x à y, $\frac{1}{z}$ à z dans les équations de condition, ce qui en donnera de nouvelles.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI.

Cas dans lesquels on peut se servir de cette Méthode.

CEtte Méthode eſt utile lorſqu'on a une, deux, trois, quatre, &c. équations à intégrer enſemble, ou lorſqu'on peut regarder une équation différentielle donnée, comme étant formée de pluſieurs autres équations. En général on integre par ſon moyen un nombre quelconque p d'équations différentielles, qui contiennent un nombre $p+1$ de variables t, x, y, z, u, &c. dont la premiere ait ſa différence dt conſtante, & dont les autres x, y, z, u, &c. & leurs différences ne ſont ni mêlées entre elles ni avec x, & y, &c. ni élevées à aucune puiſſance autre que l'unité, mais ſont ſeulement multipliées par des puiſſances convenables de dt. L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, ſi dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque compoſé comme on voudroit de t, de dt & de conſtantes.

Voici le procédé que nous fait ſuivre cette méthode.

*

CLXXII.

En quoi elle consiste.

On multiplie par un coefficient indéterminé la seconde des deux équations proposées, lorsqu'il n'y en a que deux; si on en a trois, on multiplie aussi la troisieme par une indéterminée différente de celle qui multiplie la seconde, & ainsi de suite. Après cette premiere opération, on ajoute ces équations les unes aux autres, on détermine les valeurs des coefficients indéterminés, & par leur moyen aussi celles de t, x, y, &c.

Avant d'appliquer cette méthode à des exemples, nous établirons une proposition qui nous est nécessaire pour la suite.

CLXXIII.

Lemme préparatoire.

LEMME. Si l'on a une fonction $\varphi(z+\xi)$, telle que la variable z croisse ou décroisse d'une quantité très-petite ξ, je dis qu'on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2.3.} +$ &c. On suppose ici que $d(\varphi z) = dz\,\Delta z$, que $d(\Delta z) = dz\,\Gamma z$, que $d(\Gamma z) = dz \downarrow z$; & ainsi de suite.

DÉMONST. Soit $\varphi(z+\xi) = \varphi z + u$: je différentie cette équation en traitant z comme constante, ξ & u comme variables; j'aurai $d\xi\,\Delta(z+\xi) = du$: donc $u = \int d\xi\,\Delta(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\,\Delta(z+\xi)$. Soit maintenant $\Delta(z+\xi) = \Delta z + y$, j'aurai en regardant z comme constante & ξ & y comme variables $y = \int d\xi\,\Gamma(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\,\Delta z + \int d\xi \int d\xi\,\Gamma(z+\xi)$. Soit encore $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + t$, j'aurai

j'aurai en ſuppoſant toujours z conſtante, ξ & t variables, $t = \int d\xi \downarrow (z+\xi)$; donc en ſubſtituant pour t cette valeur, on a $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + \int d\xi \downarrow (z+\xi)$, & par conſéquent $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi \Delta z + \int d\xi \int d\xi \Gamma z + \int d\xi \int d\xi \int d\xi \downarrow z +$ &c. on trouveroit une ſuite de termes à l'infini. Donc (Art. CCXVIII. 1ere Partie) $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2.3} +$ &c.

CLXXIV.

Corollaire. On trouvera par la même méthode que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha\alpha x^2 c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 c^{fx}}{2.3} +$ &c. Car ſoit $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + t$, & ſoit x conſtante, α & t variables, on aura $c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha = dt$, donc $t = \int c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha$ & $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha$. Donc on aura une ſuite telle que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int dx\, \alpha c^{fx} + \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} + \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} +$ &c. Donc en intégrant on a $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha\alpha x x c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 c^{fx}}{2.3.} +$ &c.

Paſſons maintenant à l'application de notre méthode à des exemples.

CLXXV.

Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations.

Probleme 1. Trouver l'intégrale des deux équations

$$dx + (Cx + Dy)\, dt = 0$$
$$dy + (Kx + Ly)\, dt = 0.$$

Solution. Suivant ce que nous avons dit, je multiplie la ſeconde de ces deux équations par un coefficient

indéterminé v, elle devient

$$v\,dy + (Kx + Ly)\,v\,dt = 0;$$

j'ajoute cette équation à la premiere, ce qui me donne l'équation ſuivante

$$(A)\ dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0;$$

à préſent je fais en ſorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ ſoit un multiple de $x + vy$. J'aurai donc

$$Cx + Kvx + Dy + Lvy = Rx + Rvy,$$

(R eſt un coefficient conſtant quelconque.) Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $C + Kv = R$, & $D + Lv = Rv$, ou $\frac{D + Lv}{v} = R$. Donc $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$: donc $Cv + Kvv = D + Lv$, ou bien $Kvv + Cv - Lv = D$, ou $vv + \frac{Cv}{K} - \frac{Lv}{K} = \frac{D}{K}$: donc $vv + \frac{Cv - Lv}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK} = \frac{D}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK}$: donc en prenant la racine quarrée $v = \frac{-C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(4DK + CC - 2CL + LL)}}{2K}$: donc enfin $(B)\ v = \frac{-C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}}{2K}$.

Je ſuppoſe à préſent . . . . . $x + vy = u$

j'ai . . . . . $dx + v\,dy = du$.

D'ailleurs l'équation $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$ donne $D + Lv = (C + Kv).v$. Donc $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)x + (C + Kv)vy = (C + Kv).(x + vy) = (C + Kv)u$. Donc l'équation (A) $dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0$ devient, en faiſant les ſubſtitutions précédentes,

$$du + (C + Kv)\,u\,dt = 0$$

ou . . . . . $\frac{du}{u} = (C + Kv)\,x - dt$

équation dont l'intégrale eſt, comme on le ſait,

$$lu = (C + Kv)\,x - t,$$

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & g pour la conſtante, $lu = lge^{-(C+Kv)t}$

ou bien . . . . . $u = ge^{-(C+Kv)t}$

Soient maintenant p, p' les deux valeurs de v trouvées par l'équation (B), au lieu de l'équation $x + vy = u$, on aura ces deux-ci . . . . . $(C)\ x + py = u$

$$(D)\ x + p'y = u';$$

& de même au lieu de l'équation $u = ge^{-(C+Kv)t}$ on aura les deux ſuivantes . . . . $u = ge^{-(C+Kp)t}$

$$u' = g'e^{-(C+Kp')t}.$$

Des deux équations (C) & (D), je tire aiſément les valeurs de x & de y. Car retranchant l'équation $x + p'y = u'$ de l'équation $x + py = u$, j'ai $py - p'y = u - u'$:

Donc . . . . . $y = \frac{u - u'}{p - p'}$.

Pour avoir maintenant la valeur de x, je multiplie par p' l'équation . . . . . $x + py = u$,

& par p l'équation . . . . $x + p'y = u'$,

ce qui me donne . . . $p'x + p'py = p'u$

& . . . . . $px + pp'y = pu'$;

je retranche la ſeconde de la premiere, j'ai

$$p'x + p'py - px - pp'y = p'u - pu',$$

donc . . . . . $p'x - px = p'u - pu'$,

Donc . . . . . $x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$.

On mettra dans ces valeurs de x & de y pour u & pour u' leurs valeurs $ge^{-(C+Kp)t}$ & $g'e^{-(C+Kp')t}$; on déterminera les constantes g & g' en supposant $t = 0$ ou une grandeur connue, & on aura l'intégrale cherchée.

CLXXVI.

Observations nécessaires sur la solution précédente.

REMARQUE 1. Si les valeurs de v sont imaginaires, l'intégration se fera toujours de même. Car nous avons démontré dans l'Introduction que les exponentielles imaginaires se réduisent toujours à $A + B'\sqrt{-1}$, $A - B'\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. Si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en disparoîtroient.

CLXXVII.

REMARQUE 2. Si v n'avoit pas deux valeurs, le Problême n'auroit pas plus de difficulté, au contraire il se résoudroit beaucoup plus aisément. Car v ne peut avoir moins de deux valeurs qu'en supposant $K = 0$, ou $D = 0$; l'inconnue v n'étant plus qu'à la premiere puissance dans le premier cas, & dans le second l'équation entiere pouvant se diviser exactement par v est du premier degré. Or dans ces deux cas une des deux équations est intégrable, & l'autre se réduit à la formule de M. Bernoulli, traitée dans le Chapitre VII.

Supposons $D = 0$, la premiere équation devient

$$dx + Cx\,dt = 0.$$

Donc . . . . . $\frac{dx}{x} = -C\,dt$,

donc . . . . . $lx = -Ct$,

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & m pour la conſtante, on a $x = me^{-Ct}$.

La ſeconde équation eſt $dy + Lydt + Kxdt = 0$: mettant dans cette équation pour x ſa valeur en t tirée de l'équation précédente, on voit clairement qu'elle eſt de la forme ſuivante $dy + Aydt + Tdt = 0$, équation dans laquelle A eſt une conſtante & T une fonction de t & de conſtantes. Donc elle s'intégre par la méthode de M. Bernoulli.

Ce ſera la même choſe, ſi on ſuppoſe $K = 0$, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

CLXXVIII.

Remarque. Si les deux valeurs de v ſont égales, on prendra arbitrairement une de ces deux valeurs, & après avoir réſolu l'équation $du = -dt(C + Kv)u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u. Par exemple, je prends ici p pour la valeur de v. J'ai conſéquemment $u = ge^{-(C+Kp)t}$. Mettant cette valeur de u dans l'équation $x + vy = u$, elle devient $x = ge^{-(C+Kp)t} - py$. Je mets enſuite cette valeur de x dans l'équation $dy + (Kx + Ly)dt = 0$, j'ai $dy + Kge^{-(C+Kp)t}dt - Kpydt + Lydt = 0$, ou $dy + (L - Kp)ydt + Kge^{-(C+Kp)t}dt = 0$ équation qui s'integre aiſément, comme on le voit, par le moyen de la formule $dz + bzdt + Tdt = 0$. Cette

équation intégrée nous donnera la valeur de y en t. On aura donc les valeurs de x & de y en t.

CLXXIX.

Cas dans lequel on peut résoudre autrement le Problème.

REMARQUE 4. Nous venons de voir dans la Remarque précédente que le Problême ſe réſout très-facilement, lorſque v n'a pas deux valeurs inégales : dans ce même cas on pourroit encore trouver les valeurs de x & de y par des méthodes différentes de celles que nous venons d'employer pour cela.

Soit 1°. $D = 0$ dans l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2+4DK}}{2K}$ devient 1°. $v = \frac{-C+L+L-C}{2K}$, ou $\frac{L-C}{K}$; 2°. $v = \frac{0}{2K}$. Donc en ſuppoſant dans les formules précédentes $p' = 0$, on aura les valeurs de x & de y.

2°. Si $K = 0$, au lieu de le ſuppoſer abſolument nul, je le regarde comme infiniment petit, ce qui revient au même. Je reprends l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2+4DK}}{2K}$, je la mets ſous la forme ſuivante $v = \frac{L-C}{2K} \pm \sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$. Enſuite pour avoir les deux valeurs de v, je prends la racine quarrée de $\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$, & je trouve que cette racine eſt $\frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L}$ + un terme que je puis négliger parce qu'il eſt infiniment petit par rapport aux autres. On a donc $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \left\{ \frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L} \right\}$. Prenant l'équation en + j'ai $v = \frac{L-C}{2K} + \frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L}$, c'eſt-à-dire,

$v = \frac{D}{C-L}$. La prenant en moins je trouve $v = \frac{L-C}{2K} - \frac{C-L}{2K} - \frac{D}{C-L}$. Or les deux premiers termes de cette valeur étant infinis, je puis négliger le troiſieme. J'aurai donc pour ſeconde valeur de v, $v = \frac{L-C}{K}$.

On aura donc $u = ge^{-Ct}$; $u' = g'e^{-Lt}$; $y = K\left\{\frac{u-u'}{C-L}\right\}$; $x = u - \frac{pu'}{p'} = u + \frac{DKu'}{(C-L)^2}$.

3°. Si les valeurs de p & de p' ſont égales, je ſuppoſerai $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$ (α eſt une quantité infiniment petite.) J'ai donc $u = ge^{-(C+K\alpha+Ka)t}$. Or α étant une quantité infiniment petite peut être regardée comme une différentielle. Mais nous avons vu (Art. CLXXIV.) que ſi on avoit C^{x+dx}, on pouvoit lui donner la forme ſuivante $C^x + C^x dx$. Donc on aura par la même raiſon $u = ge^{-(C+Ka)t} - Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On trouvera de même $u' = g'e^{-(C+Ka)t} + Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On aura auſſi $y = \frac{u-u'}{2\alpha}$; $x = \frac{au-\alpha u-au'-\alpha u'}{2\alpha}$. Donc en mettant pour u & u' leurs valeurs, & ſuppoſant $g = g'$, on a $y = -Kgte^{-(C+Ka)t}$, & $x = -Kgte^{-(C+Ka)t}$.

CLXXX.

COROLLAIRE. Le Problême s'étendra très-facilement à deux équations qui contiendront deux indéterminées x & y multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque de t, avec leurs différences auſſi multipliées par des conſtantes & par une fonction de t, & de plus un terme tdt, θdt qui ne renferme que des

constantes avec t. Car ces cas se rameneront d'eux-mêmes à la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = 0$.

CLXXXI.

Application de la méthode au cas où l'on a trois équations.

PROBLEME 2. Intégrer les équations

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)\,dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)\,dt = 0.$$

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit (Art. CLXXII.) je multiplie la seconde de ces équations par un coefficient indéterminé v, & la troisieme par un autre coefficient indéterminé μ. Les trois équations précédentes deviennent alors,

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$v\,dy + (evx + fvy + gvz)\,dt = 0$$
$$\mu\,dz + (h\mu x + m\mu y + n\mu z)\,dt = 0,$$

Je les ajoute ensemble, ce qui me donne (*A*) $dx + v\,dy + \mu\,dz + \{(a + ev + h\mu)x + (b + fv + m\mu)y + (c + gv + n\mu)z\}\,dt = 0$. Je fais ensorte à présent que la quantité qui multiplie dt dans cette équation soit un facteur de $x + vy + \mu z$. J'aurai donc en supposant R un coefficient constant, j'aurai $ax + evx + h\mu x + by + fvy + m\mu y + cz + gvz + n\mu z = Rx + Rvy + R\mu z$. Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $a + ev + h\mu = R$, $b + fv + m\mu = Rv$, $c + gv + n\mu = R\mu$. Donc $a + ev + h\mu = \frac{b + fv + m\mu}{v} = \frac{c + gv + \mu n}{\mu}$. Donc $(a + ev + h\mu)v =$

$h\mu)v = b + fv + m\mu$ & $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$. Donc l'équation (A) devient (F) $dx + v\,dy + \mu\,dz + dt \times (x + vy + \mu z) \times (a + ev + h\mu) = 0$. Soit à préſent $x + vy + \mu z = u$, donc $dx + v\,dy + \mu\,dz = du$, donc l'équation (F) ſe change en la ſuivante $du + (a + ev + h\mu)u\,dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + ev + h\mu)\,dt$, ou $lu = -(a + ev + h\mu)t$. Donc en prenant E pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité & g pour la conſtante, on a $lu = lgE^{-(a+ev+h\mu)t}$, ou enfin $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$.

A préſent l'équation $av + evv + h\mu v = b + fv + m\mu$ donne la valeur de μ en v; mettant cette valeur de μ dans l'équation $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$, on aura, après avoir effacé ce qui ſe détruit & fait les réductions ordinaires, une équation du troiſieme degré qui donnera trois valeurs de v.

Soient p, p', p'' les trois valeurs de v, & m, m', m'' les trois valeurs correſpondantes de μ. J'aurai au lieu de l'équation $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$, ces trois autres équations,

$$u = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$u' = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$u'' = g''E^{-(a+ep''+hm'')t};$$

& au lieu de l'équation $x + vy + \mu z = u$, les trois ſuivantes,

$$x + py + mz = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$x + p'y + m'z = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$x + p''y + m''z = g''E^{-(a+ep''+hm'')t}.$$

De ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z,

& on déterminera les conſtantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorſque $t = 0$ ou une conſtante donnée.

CLXXXII.

REMARQUE. On peut toujours ſuppoſer que les trois valeurs de v ſont inégales. Pour cela il ſuffit d'augmenter un des coefficients a, b, c, &c. d'une quantité α infiniment petite ; alors on aura des valeurs de v toutes différentes entre elles, & dans leſquelles entrera la quantité α. Ces valeurs étant ſubſtituées à la place de p, p', p'', on trouvera celles de x, y, z, dans leſquelles n'entre plus α. Pour avoir ces valeurs de v, on ſe ſervira du parallelograme de M. Newton. Au reſte, il eſt indifférent que quelques-unes de ces valeurs ſoient imaginaires, pourvu qu'elles ſoient inégales entre elles.

CLXXXIII.

Ce qu'il faut faire ſi on avoit quatre équations.

COROLLAIRE. Si on a quatre équations, on multipliera auſſi la quatrieme par une nouvelle indéterminée π. Après avoir trouvé l'équation en v, & celle qui donne la valeur de μ en v, on mettra dans cette derniere π au lieu de μ, & au lieu de h, m, n, les coefficients qui leur répondent dans la quatrieme équation, & réciproquement h, m, n au lieu de ces coefficients. Après quoi on réſoudroit le Problême par la Méthode ſemblable à celle de l'Article CLXXXI.

Si on avoit cinq, six, &c. équations, on voit à présent comment il faudroit s'y prendre pour les résoudre.

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV.

PROBLEME I. ETant données deux quantités différentielles telles que . . . . , $\alpha dt + v ds$, $v dt + \alpha ds$ qui sont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de $t+s$; trouver α & v, & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées. Premier exemple.

SOLUTION. 1°. J'ajoute ensemble les deux différentielles proposées, ce qui me donnera $(\alpha+v)\,dt + (\alpha+v)\,ds$, qui est encore une différentielle exacte de quelque fonction de $t+s$; on a donc $(\alpha+v).(dt+ds)$. D'où il suit que $\alpha+v$ est égale à une fonction de $t+s$.

2°. Je retranche l'une de l'autre nos deux différentielles, j'ai $(\alpha-v)\,dt - (\alpha-v)\,ds$, ou $(\alpha-v).(dt-ds)$: d'où je conclus que $\alpha-v$ est égale à une fonction de $t-s$.

J'aurai donc $\alpha+v+\alpha-v = \varphi(t+s) + \Delta(t-s)$.

Donc $\alpha = \frac{\varphi(t+s)+\Delta(t-s)}{2}$.

J'aurai encore $\alpha+v-\alpha+v = \varphi(t+s) - \Delta(t-s)$;

donc $v = \frac{\varphi(t+s) - \Delta(t-s)}{2}$.

CLXXXV.

Second exemple.

PROBLEME 2. Etant données les deux différentielles exactes . . . . . $v\,dt + e\,ds$

$v\,ds + en\,dt$,

déterminer v & e, & par conséquent l'intégrale.

SOLUTION. Je mets la seconde de nos deux différentielles sous la forme suivante

$$e\sqrt{n} \times dt\sqrt{n} + v\,ds.$$

Je multiplie la premiere par $\sqrt{n}$, ce qui ne l'empêche pas d'être une différentielle exacte, elle devient

$$v\,dt\sqrt{n} + e\,ds\sqrt{n}.$$

Maintenant 1°. j'ajoute ensemble ces deux différentielles, j'ai . . . $(dt\sqrt{n} + ds).(e\sqrt{n} + v)$

2°. Je les retranche l'une de l'autre, j'aurai

$$(dt\sqrt{n} - ds).(e\sqrt{n} - v).$$

De là je conclus que $e\sqrt{n} + v$ est une fonction de $t\sqrt{n} + s$, & $e\sqrt{n} - v$ une fonction de $t\sqrt{n} - s$. Donc $e\sqrt{n} + v + e\sqrt{n} - v = \varphi(t\sqrt{n} + s) + \Delta(t\sqrt{n} - s)$. Donc $e = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2\sqrt{n}}$; donc $en = \frac{[\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)]\sqrt{n}}{2}$.

De même on aura $e\sqrt{n} + v - e\sqrt{n} + v = \varphi(t\sqrt{n} + s) - \Delta(t\sqrt{n} - s)$. Donc $v = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) - \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2}$.

CLXXXVI.

Troiſieme exemple plus compliqué que les deux précédens.

PROBLEME 3. Soient données deux quantités

$$\alpha ds + \epsilon dt$$

$$\rho\alpha dt + v\epsilon ds + dt\,\Delta(t,s) + ds\,\Gamma(t,s)$$

dans leſquelles ρ & v déſignent des conſtantes données, $\Delta(t,s)$, $\Gamma(t,s)$ des fonctions quelconques données de t & de s. De plus ces deux quantités ſont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de t & de s; déterminer α & ϵ.

SOLUTION. Je diviſe par la conſtante ρ tous les termes de la ſeconde différentielle, le Problême ſe réduira à opérer ſur les deux quantités

$$\alpha ds + \epsilon dt$$

$$\text{\&} \quad \alpha ds + \frac{v\epsilon ds}{\rho} + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\rho} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\rho},$$

de maniere qu'elles ſoient l'une & l'autre une différentielle complete.

Soit $\frac{v}{\rho} = n$, je diviſe la ſeconde différentielle par $\sqrt{n}$, & j'écris

$$\epsilon\sqrt{n}\cdot\frac{dt}{\sqrt{n}} + \alpha ds$$

$$\frac{\alpha dt}{\sqrt{n}} + \epsilon\sqrt{n}\cdot ds + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\rho\sqrt{n}} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\rho\sqrt{n}}.$$

Or chacune de ces deux différentielles devant être complete, il faut que leur ſomme & leurs différences ſoient auſſi chacune une differentielle complete.

On aura donc 1°. en les ajoutant enſemble $(\epsilon\sqrt{n} + \alpha)\left\{\frac{dt}{\sqrt{n}} + ds\right\} + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\rho\sqrt{n}} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\rho\sqrt{n}}$.

Soit . . . . . $\epsilon\sqrt{n} + \alpha = m$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} + s = u,$$

en ſubſtituant ces valeurs & nommant $\psi(u,s)$ & $\Pi(u,s)$

les fonctions de u & de s qui viennent de la ſubſtitution de $(u-s)\sqrt{n}$ au lieu de t dans $\Delta(t,s)$ & $\Gamma(t,s)$, on aura la transformée ſuivante

$$m\,du + du\,\downarrow(u,s) + ds\,\Pi(u,s)$$

qui doit être une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{dm}{ds} + \frac{d\downarrow(u,s)}{ds} = \frac{d\Pi(u,s)}{du}$, s variant ſeul dans le premier membre & u ſeul dans le ſecond. Donc $dm = -d\downarrow(u,s) + \frac{ds\,d\Pi(u,s)}{du}$. Donc en prenant s pour variable & u pour conſtant, on a $m = -\downarrow(u,s) + \varphi u + \int ds\,\frac{d\Pi(u,s)}{du}$.

2°. Retranchons maintenant la ſeconde de nos deux différentielles de la premiere, nous aurons $(\epsilon\sqrt{n}-\alpha)\cdot\left\{\frac{ds}{\sqrt{n}} - ds\right\} - \frac{ds\,\Delta t,s}{\varsigma\sqrt{n}} - \frac{ds\,\Gamma t,s}{\varsigma\sqrt{n}}$ qui doit encore être une différentielle complete.

Soit . . . . . $\epsilon\sqrt{n}-\alpha = \mu$

$$\frac{s}{\sqrt{n}} - s = y,$$

on aura $\mu\,dy + dy\,\Xi(y,s) + ds\,F(y,s)$, transformée qui eſt une différentielle exacte. Donc on aura par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi(y,s)}{ds} = \frac{dF(y,s)}{dy}$; & en ſuppoſant s variable & y conſtant $\mu = -\Xi(y,s) + \Sigma y + \int ds\,\frac{dF(y,s)}{dy}$.

Or $\mu = \epsilon\sqrt{n}-\alpha$, donc $\epsilon\sqrt{n} = \alpha+\mu$. De même $m = \alpha+\epsilon\sqrt{n}$; donc $\epsilon\sqrt{n} = m-\alpha$. Donc $\alpha+\mu = m-\alpha$. Donc $\alpha = \frac{m-\mu}{2}$. Maintenant $\alpha = \epsilon\sqrt{n}-\mu$. Donc $\epsilon = \frac{m+\mu}{2\sqrt{n}}$. On aura par conſéquent les valeurs de α & ϵ, puiſqu'on a celles de m & de μ.

CLXXXVII.

REMARQUE. Il n'y auroit aucune difficulté pour l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ ſeroit imaginaire. Car ſi α & ϵ doivent être réelles, nous avons appris dans l'Introduction à en faire évanouir les imaginaires.

CLXXXVIII.

PROBLEME 4. Soient encore les deux différentielles plus générales que les précédentes

Quatrieme exemple qui renferme les trois autres.

$$\alpha ds + \epsilon du$$

&

$$\varphi \alpha du + p\epsilon du + \gamma \epsilon ds + m\alpha ds + dt\,\Delta(u,s) + ds\,\Gamma(u,s)$$

qui doivent être l'une & l'autre une différentielle exacte, trouver α & ϵ.

SOLUTION. Soit . . . . $ku + rs = gy$

& . . . . . $fu + \delta s = ht$,

k, r, g, f, δ, h ſont des conſtantes indéterminées; on aura . . . . . $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$

& . . . . . $u = \frac{hrt - \delta gy}{fr - \delta k}$;

ou en changeant les ſignes $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$.

On aura par conſéquent $ds = \frac{fgdy - hkdt}{fr - \delta k}$; $du = \frac{\delta gdy - hrdt}{\delta k - fr}$.

Soit . . . . . $\frac{fg}{fr - \delta k} = \lambda$

$\frac{-hk}{fr - \delta k} = \varphi$

$\frac{\delta g}{\delta k - fr} = \mu$

$\frac{-hr}{\delta k - fr} = \nu$

on aura . . . . . $ds = \lambda dy + \varphi dt$;

& . . . . . $du = \mu dy + \upsilon dt$.

Je ſubſtitue ces valeurs dans les deux différentielles propoſées. La premiere devient

$$\alpha\lambda\, dy + \epsilon\mu\, dy + \alpha\varphi\, dt + \epsilon\upsilon dt;$$

& la ſeconde multipliée par un coefficient indéterminé n ſera $\left\{(\rho\alpha + p\epsilon)\,\mu + (\gamma\epsilon + m\alpha)\,\lambda\right\} n\,dy + n\,dy\,\Delta(y,t) + \left\{(\rho\alpha + p\epsilon)\,\upsilon + (\gamma\epsilon + m\alpha)\,\varphi\right\} n\,dt + n\,dt\,\downarrow y,t$.

1°. J'ajoute enſemble ces deux différentielles, j'aurai $(\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n)\,dy + n\,dy\,\Delta y,t + (\alpha\varphi + \epsilon\upsilon + \rho\alpha\upsilon n + p\epsilon\upsilon n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n)\,dt + n\,dt\,\downarrow y,t$. Il eſt donc viſible qu'on pourra trouver les valeurs de α & ϵ, ſi dans cette équation $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; & (en prenant une autre valeur de n) $\alpha\varphi + \epsilon\upsilon + \rho\alpha\upsilon n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n + p\epsilon\upsilon n = 0$.

Mais pour que l'équation $\alpha(\lambda + \rho\mu n + m\lambda n) + \epsilon.(\mu + p\mu n + \gamma\lambda n) = 0$ ait lieu, quelles que ſoient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\lambda + \rho\mu n + m\lambda n = 0$, & qu'auſſi $\mu + \mu pn + \gamma\lambda n = 0$. Ces deux équations nous donnent $(1 + mn)\lambda = -\rho\mu n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1 + mn}$; & $(1 + pn)\,\mu = -\gamma\lambda n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Nous tirerons de cette équation une valeur de n telle que $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$,

De même pour que $\alpha(\varphi + \rho\upsilon n + m\varphi n) + \epsilon(\upsilon + p\upsilon n + \gamma\varphi n) = 0$, quelles que ſoient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\varphi + \rho\upsilon n + m\varphi n = 0$, & $\upsilon + p\upsilon n + \gamma\varphi n = 0$. De

ces

ces équations on tire $(1+mn)\varphi = -\rho v n$; ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{-\rho n}{1+mn}$; & encore $(1+pn)v = -\gamma\varphi n$, ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; & par conséquent pour trouver n on aura la même équation qu'auparavant.

Je la résous cette équation $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; j'aurai $n^2 - \frac{(m+p)n}{\gamma\rho - mp} = \frac{1}{\gamma\rho - mp}$. Donc $n - \frac{(m+p)}{2.(\gamma\rho-mp)} = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma\rho-mp} + \frac{(m+p^2)}{4.(\gamma\rho-mp)^2}}$. Donc enfin $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho-mp)} \pm \frac{\sqrt{[4\gamma\rho+(m-p)^2]}}{2(\gamma\rho-mp)}$; & ce sont-là les deux valeurs de n.

Je multiplie la seconde différentielle transformée, 1°. par une des deux valeurs de n, ensuite par l'autre; j'aurai les deux équations suivantes : la première $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dt + y, t.$

La seconde sera $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \cdot \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right\} dt + y, t.$

A ces deux différentielles j'ajoute la première différentielle transformée $(\alpha\lambda + \epsilon\mu)\,dy + (\alpha\varphi + \epsilon v)\,dt$, à laquelle je donne la forme suivante $\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu} + \epsilon\right)\mu\,dy + \left(\frac{\alpha\varphi}{v} + \epsilon\right)v\,dt$, j'aurai 1°. $\left\{\rho\alpha + p\epsilon + \frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon + \alpha m)\right\}$

$\times \left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\mu dy+$
$\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)dy\Delta y,t+\Big\{\Big(p\alpha+p\epsilon+$
$\frac{\varphi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)+\frac{\alpha\varphi}{v}+\epsilon\Big\}$
$v\,dt+\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)dt+y,t.$

2°. On aura $\Big\{\Big(p\alpha+p\epsilon+\frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times$
$\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\mu dy+$
$\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)dy\Delta y,t+\Big\{\Big(p\alpha+p\epsilon+$
$\frac{\varphi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)+\frac{\alpha\varphi}{v}+\epsilon\Big\}$
$v\,dt+\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma p+(m-p)^2}}{2.(\gamma p-mp)}\right)dt+y,t.$

Dans ces deux différentielles je mets au lieu de $\frac{\lambda}{\mu}$ sa valeur $\frac{-pn}{1+mn}$, & au lieu de $\frac{\varphi}{v}$ sa valeur $\frac{-pn}{1+mn}$, en observant d'y prendre deux valeurs différentes de n ; & alors j'aurai deux différentielles intégrables par la méthode du Problême 3.

CLXXXIX.

Examen de quelques cas particuliers.

SCHOLIE 1. Il ne peut y avoir de difficulté que dans deux cas. L'un feroit celui dans lequel l'équation $\frac{-pn}{1+mn}=\frac{1+pn}{-\gamma n}$ ou bien $(\gamma p-mp)n^2-(m+p)n-1=0$ ne monteroit pas au second degré. Le second feroit celui dans lequel cette même équation ne pourroit se résoudre. Le premier de ces deux cas arrivera, si $\gamma p=mp$: car alors $(\gamma p-mp)n^2=0$, & l'équation n'est plus que du premier degré, & par conséquent n n'a qu'une seule valeur,

Le second cas arrivera si $\gamma\rho = mp$, & si de plus $m = -p$; car alors on auroit $-1 = 0$, ce qui est impossible. Examinons ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Si $\gamma\rho = mp$, je fais $p = \rho K$, j'aurai $\gamma\rho = mK\rho$; donc $\gamma = Km$. Les deux différentielles feront donc la premiere

$$\alpha\, ds + \epsilon\, du,$$

& la seconde

$$\rho\alpha\, du + \rho K\epsilon\, du + K\epsilon m\, ds + m\alpha\, ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s,$$

ou bien,

$$(\rho\, du + m\, ds).(\alpha + K\epsilon) + du\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s.$$

Soit maintenant . . . . . $\rho\pi + ms = t$, on aura $\rho\, d\pi + m\, ds = dt$, & soit $\alpha + K\epsilon = \mu$, la différentielle précédente deviendra celle-ci $\mu dt + ds\downarrow u, s + dt\,\Xi u, s$ & sera une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi u, s}{ds} = \frac{d\downarrow u, s}{dt}$. Donc $d\mu = -d\Xi u, s + \frac{ds\, d\downarrow u, s}{ds}$. Donc enfin $\mu = -\Xi u, s + \varphi t + \int \frac{ds\, d\downarrow u, s}{dt}$.

Pour déterminer α je fais les mêmes transformations sur la différentielle $\alpha\, ds + \epsilon\, du$. Ces transformations nous donnent $du = \frac{dt - m\, ds}{\rho}$, $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$. Donc la premiere différentielle transformée sera $\alpha\, ds + \left(\frac{\mu - \alpha}{K}\right).\left(\frac{dt - m\, ds}{\rho}\right)$; ou bien $\left(ds + \frac{m\, ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho}\right)\alpha + \frac{\mu\, dt}{K\rho} - \frac{m\mu\, ds}{K\rho}$. Soit $\left(1 + \frac{m}{K\rho}\right)s - \frac{t}{K\rho} = y$, on aura $ds + \frac{m\, ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho} = dy$; & aussi $\frac{\mu\, dt}{K\rho} = \mu\, ds + \frac{\mu m\, ds}{K\rho} - \mu\, dy$. Donc la différen-

tielle précédente se change en celle-ci $(\alpha - \mu)\,dy + \mu\,ds$. Donc comme elle est une différentielle complete, on aura $\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dy}$. Donc enfin $\alpha = \mu + \int \frac{ds\,d\mu}{dy}$. Donc aussi on aura la valeur de ϵ, puisque $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$.

2°. Si l'on a $p = -m$ & $\rho\gamma = mp$, on fera usage de la méthode que nous venons d'exposer pour le cas où l'on a seulement $\rho\gamma = mp$. Ainsi ce second cas ne présente aucune nouvelle difficulté.

CXC.

SCHOLIE 2. On pourroit encore être embarrassé dans le cas où n auroit ses deux racines égales. Examinons ce qu'il faut faire dans ce cas, lequel aura lieu si $-4\gamma\rho = (m-p)^2$; comme on le voit sans peine. Dans ce cas on supposera seulement $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; ce qui nous donne, en faisant le même raisonnement que dans l'Article CLXXXVIII. $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1+mn}$, & $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc on aura de même $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; donc à cause de l'hypothese présente $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)}$. Je substitue cette valeur de n dans le coefficient de dt; c'est-à-dire, dans $\alpha\varphi + \epsilon v + \rho\alpha vn + p\epsilon vn + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n$; & la seconde transformée sera en prenant pour φ & pour v tout ce qu'on voudra, $ndy\Delta y, t + \left\{\alpha\left(\varphi + (\rho v + m\varphi)\cdot\left(\frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)}\right)\right) + \epsilon\left(v + (pv + \gamma\varphi)\cdot\left(\frac{m+p}{2\cdot(\gamma\rho - mp)}\right)\right)\right\} dt + n\,dt + y, t$; & en supposant $\varphi + (\rho v + m\varphi) \times \left(\frac{m+p}{2\cdot(\gamma\rho - mp)}\right) = M$, & $v + (pv + \gamma\varphi) \times \frac{m+p}{2\cdot(\gamma\rho - mp)}$

$= N$, on aura la différentielle ſuivante,

$$(M\alpha + N\epsilon)dt + \eta dy\,\Delta y, t + \eta dt\,\downarrow y, t,$$

dans laquelle M & N repréſentent des conſtantes données.

Cette différentielle étant par l'hypotheſe une différentielle complete, on aura $\frac{Md\alpha + Nd\epsilon}{dy} + \frac{d(\eta\downarrow y, t)}{dy} = \frac{d(\eta\Delta y, t)}{dt}$. Donc $Md\alpha + Nd\epsilon = -d(\eta\downarrow y, t) + \frac{dy\,d(\eta\Delta y, t)}{dt}$. On aura donc la valeur de $M\alpha + N\epsilon$ en y & en t, ou ce qui revient au même en s & en u, puiſque, comme on l'a vu (Art. CLXXXVIII.) $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$, & $u = \frac{\delta gy - krt}{\delta k - fr}$. Nous pourrons donc ſuppoſer

$$\alpha = \Xi u, s + K\epsilon,$$

K étant une conſtante connue. Subſtituant pour α cette valeur dans la différentielle $\alpha ds + \epsilon du$ qui par la ſuppoſition eſt une différentielle exacte, on aura $\epsilon(Kds + du) + ds\,\Xi u, s$. Donc en ſuppoſant $Ks + u = r$, on aura la transformée ſuivante $\epsilon dr + ds\,\Xi s, r$ qui doit encore être une différentielle complete : on trouvera donc facilement la valeur de ϵ en s & r, ou ce qui eſt la même choſe en s & en u.

CXCI.

SCHOLIE 3. Il y a encore un cas dans lequel la premiere méthode ne peut réuſſir ; c'eſt lorſque $\rho = 0$. Mais alors l'intégration n'en ſera que plus facile. En effet, je donne à la ſeconde différentielle propoſée $\rho\alpha du + \epsilon p du + \gamma\epsilon ds + m\alpha ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma w, s$ la forme ſuivante $m\alpha ds + m\epsilon du + p\epsilon du - m\epsilon du + \gamma\epsilon ds + dt\,\Delta u, s +$

$ds\Gamma u, s$. Or par l'hypotheſe $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle exacte ; donc la partie reſtante $(p\epsilon - m\epsilon)\, du + \gamma\epsilon\, ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ doit encore être complete. Je ſuppoſe $(p - m)\, u + \gamma s = t$, j'aurai la transformée ſuivante . . . . . $\epsilon dt + d\downarrow s, t + ds\Delta t, s$, qui ſera une différentielle complete. Donc en ſuivant les méthodes précédentes on déterminera facilement ϵ & par conſéquent α.

Si γ étoit $= 0$, alors on auroit pour ſeconde différentielle $\varsigma\alpha\, du + p\epsilon\, du + m\alpha\, ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ à laquelle on donneroit la forme ſuivante $p\alpha\, ds + p\epsilon\, du + (m\alpha - p\alpha)\, ds + \varsigma\alpha\, du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$. Or par l'hypotheſe $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle complete ; donc la partie reſtante $(m\alpha - p\alpha)\, ds + \varsigma\alpha\, du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ en eſt auſſi une. Suppoſant $(m - p)\, s + \varsigma u = t$, on déterminera α & enſuite ϵ par la même voie par laquelle on a trouvé ϵ & enſuite α dans l'article précédent.

Nous allons maintenant expoſer les méthodes qui ſont connues pour l'intégration des différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des Différentielles à pluſieurs variables du ſecond ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII.

Notions préliminaires.

LES différences ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c. s'expriment de deux façons différentes, 1°. de la façon ſuivante ddx, $dddx$, $ddddx$, &c. en mettant l'un après l'autre un nombre de d égal au degré de la différence; ou bien 2°. en mettant au d un expoſant qui contienne un nombre d'unités égal au degré de la différence, comme d^2x, d^3x, d^4x & en général d^nx.

Nous réduirons ici les différentielles du ſecond ordre à celles du premier, dont l'intégration nous a occupés juſqu'à préſent; nous réduirons de même les différentielles du troiſieme ordre à celles du ſecond, & ainſi de ſuite.

CXCIII.

Avant d'expliquer les regles qu'il faut ſuivre dans l'intégration des équations à pluſieurs variables qui contiennent des ſecondes, ou des troiſiemes, ou des quatriemes différences, il eſt bon de ſe rappeller leur formation.

La différence de ydx, en regardant y & dx comme variables, eſt $dydx+yddx$. Celle de $dydx+yddx$ eſt $dyddx+dxddy+yd^3x+d^2xdy$, & ainſi des troiſiemes, quatriemes, &c. différences.

De là il eſt facile de tirer cette propoſition. L'intégrale de $dydx+yd^2x$ eſt ydx. Celle de $dyd^2x+dxd^2y+yd^3x+d^2xdy$ eſt $dydx+yddx$.

La différence de $\frac{dx}{dy}$ eſt $\frac{dyddx-dxddy}{dy^2}$; & celle de $\frac{ydx}{xdy}$ eſt $\frac{xydyddx+xdxdy^2-xydxd^2y-ydydx^2}{x^2dy^2}$. Donc l'intégrale de $\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dy^2}$ eſt $\frac{dx}{dy}$; & ainſi des autres.

CXCIV.

REMARQUE 1. Lorſqu'on paſſe des premieres différences aux différences ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c. on regarde quelquefois comme conſtante une différentielle du premier, du ſecond, du troiſieme ordre. Ainſi, par exemple, en différentiant x^mdxdy, je puis regarder dx comme conſtante, & alors la différentielle de la propoſée ſera $mx^{m-1}dx^2dy+x^mdxddy$. De là il ſuit évidemment que quand dans cette même hypotheſe il s'agira d'intégrer $mx^{m-1}dx^2dy+x^mdxddy$, il faudra traiter dx comme une conſtante ordinaire.

CXCV.

REMARQUE 2. On doit de plus ſe ſouvenir que de même que dans la réduction des différentielles du premier ordre

ordre aux grandeurs finies, on ajoute une conſtante pour completer l'intégrale, il en faut auſſi ajouter une dans la réduction des ſecondes différences aux premieres, des troiſiemes aux ſecondes, &c. Il ſuit même de la Remarque précédente que la conſtante qu'il faudra ajouter à l'intégrale, ſera une différentielle du premier ordre, lorſque la différentielle propoſée ſera du ſecond; que cette conſtante ſera une différentielle du ſecond ordre, lorſque la propoſée ſera du troiſieme; & ainſi de ſuite. Après ces notions préliminaires entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du ſecond ordre, dans le cas où l'on ſait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme conſtante dans le paſſage des premieres différences aux ſecondes.

CXCVI.

Premier exemple.

Soit l'équation $\frac{by^m dy\,du}{c^m} = 2ay\,ddx + a\,dx\,dy$, dans laquelle $du =$ (Art. XCI. Prem. Partie.) $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt l'élément de la rectification de la courbe, & eſt ſuppoſée conſtante. J'obſerve que le ſecond membre de cette équation ſeroit intégrable, s'il étoit diviſé par $2\sqrt{y}$, ce que je puis trouver par le Théorême fondamental de la

premiere Section, en mettant z & dz au lieu de dx & de ddx; j'obſerve auſſi que le premier membre du étant conſtante, ſera toujours intégrable, quelque fonction de y qui le diviſe ou le multiplie. Je diviſe donc toute l'équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^m dy\,du}{2c^m\sqrt{y}} = ay^{\frac{1}{2}}\,ddx + \frac{a\,dx\,dy}{2\sqrt{y}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}\,du}{(m+\frac{1}{2})\cdot 2c^m} = a\,dy^{\frac{1}{2}}\,dx + g\,du$. $g\,du$ eſt la conſtante que j'ajoute pour rendre l'intégrale complete.

CXCVII.

Second exemple. Soit l'équation $Y = \frac{dx^2 - y\,ddy}{y^3\,dx^2}$, dans laquelle $y\,dx$ qui exprime l'élément de l'aire de la courbe, eſt ſuppoſée conſtante, Y repréſente une fonction quelconque de y. Pour intégrer cette équation, je la multiplie par $2\,dy$, ce qui me donne $2Y\,dy = \frac{2\,dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{y^3\,dx^2}$. Or l'intégrale de cette équation $y\,dx$ étant conſtante, eſt $\int 2Y\,dy = -\frac{1}{yy} - \frac{-dy^2}{yydx^2} \pm nyy\,dx^2$.

CXCVIII.

Troiſieme exemple. Si la propoſée étoit $Y = \frac{du^2 - y\,ddy}{y^3\,dx^2}$, & que dx fût conſtante, Y repréſentant une fonction quelconque de y. Puiſque $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $du^2 = dx^2 + dy^2$, & différentiant $du\,ddu = dy\,ddy$. Subſtituant cette valeur de ddy dans l'équation, & la multipliant par $2y$, on a $2Y\,dy = \frac{2y\,dy\,du^2 - 2yy\,du\,ddu}{y^4\,dx^2}$, équation dont l'in-

tégrale eſt $\int 2Ydy = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm ndx^2$.

CXCIX.

On pourroit encore intégrer cette équation d'une autre maniere. Je mets pour du ſa valeur $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ce qui me donne $Y = \frac{dx^2+dy^2-yddy}{y^3dx^2}$, & multipliant par $2ydy$, on a $2Ydy = \frac{2ydydx^2+2ydy^3-2x^2dyddy}{y^4dx^2}$. Or dx étant conſtante, on voit facilement que l'intégrale de cette équation eſt $\int 2Ydy = \frac{-dx^2-dy^2}{yydx^2} \pm ndx^2$; qui eſt abſolument la même que la précédente, puiſque $du = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

CC.

Quatrieme exemple.

Qu'on nous demande maintenant l'intégrale de cette équation $Y = \frac{dxdydu^2+ydu^2ddx-ydxduddu}{ydxdydt^2}$, dans laquelle du eſt l'élément de l'arc de la courbe, t eſt une fonction de x & de y; aucune différentielle n'ayant été priſe pour conſtante. Je multiplie toute l'équation par $\frac{2}{y^3dx^3}$, ce qui me donne $\frac{2Ydxdydt^2}{y^3dx^3} = \frac{2dxdydu^2+2ydu^2ddx-2ydxduddu}{y^3dx^3}$: réduiſant & multipliant le ſecond membre de cette équation haut & bas par dx, on aura $\frac{2Ydydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydydx^2du^2+2y^2du^2dxdx-2y^2dx^2dud^2u}{y^4dx^4}$, dont l'intégrale eſt $\int\frac{2Ydydt^2}{y^2dx^2} = \frac{-du^2}{y^2dx^2} \pm C$.

CCI.

Il arrive ſouvent que dans une équation telle différentielle eſt conſtante qui rend l'intégration très-difficile. Il

ſeroit alors fort utile de transformer l'équation en une autre dans laquelle cette différentielle fût variable. C'eſt ce que nous apprend la méthode ſuivante ; par ſon moyen on change l'équation propoſée en une autre qui n'a aucune différentielle conſtante. C'eſt ce que M. Bernoulli appelle completer une équation différentielle. Au reſte, la méthode que nous donnons ici eſt plus ſimple & plus claire que celle qu'emploie ce grand Géometre.

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII.

Expoſition de cette méthode appliquée à des différentielles du ſecond ordre.

PROBLEME. ÉTant donnée une équation telle que $A\,ddy + B\,dx^2 + C\,dy^2 + E\,dx\,dy = 0$ dans laquelle dx eſt conſtant, la transformer en une autre dans laquelle dx ſoit variable.

SOLUTION. Soit AC o[illegible]$K = dx$, $KF = dy$; dx étant conſtant, on aura CD ou $FG = dx$, $GI = dy$, $IH = ddy$. IH ſera donc le ddy, dans le cas où dx ne varie point ; c'eſt par conſéquent le ddy de l'équation propoſée. Faiſons maintenant varier dx, & ſoit DE ou $GL = ddx$, on voit clairement que $LM = dy + ddy$; Il s'agit donc de trouver la valeur du premier ddy, c'eſt-

Figure 8.

à-dire, de IH en ddx & ddy, ce qui fera disparoître ce premier ddy, & mettra dans l'équation le nouveau $d'd'y$ avec le ddx. Or les triangles semblables FLM, FGH nous donnent l'analogie suivante $LM : GH :: FL : FG$, c'est-à-dire $dy + d'd'y : dy + ddy :: dx + ddx : dx$. Donc $dydx + dxd'd'y = dxdy + dyddx$ $dxddy + ddyddx$. J'efface le terme $ddyddx$ qui est nul par rapport aux autres : j'aurai $ddy = \frac{dxd'd'y - dyddx}{dx}$. C'est la valeur qu'il faut substituer dans l'équation proposée à la place de ddy. Après cette substitution on aura une équation complete, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus de différentielle constante.

CCIII.

Autre maniere de résoudre ce Problême.

On peut encore résoudre ce Problême d'une autre maniere. Reprenons la proposée $Addy + Bdx^2 + Cdy^2 + Edxdy = 0$, je la mets sous la forme suivante $\frac{Addy}{dx} + Bdx + \frac{Cdy^2}{dx} + Edy = 0$, ou bien $Ad(\frac{dy}{dx}) + \ldots$ &c. $= 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{dy}{dx}$ est une quantité finie. Mais $d.(\frac{dy}{dx}) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$. C'est la valeur qu'il faudra substituer à $\frac{ddy}{dx}$ dans l'équation précédente. Donc la valeur qu'il faut substituer à ddy sera $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$, la même que nous avons déja trouvée.

CCIV.

Application de la méthode aux différentielles du troisieme ordre.

Soit maintenant une équation différentielle du troisieme ordre $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 + Edy^3 + Fdydx^2 + Ddyddy + Gdxdy^2 = 0$ dans laquelle dx est constant, & qu'on veut completer. Je divise cette équation par dx^2, & j'ai $\frac{Ad^3y}{dx^2} + \ldots$ &c. $= 0$, ou $Ad.(\frac{ddy}{dx^2}) + \ldots$ &c. $= 0$, réduite au cas des équations du second ordre. Pour trouver maintenant la valeur qu'il faudra substituer au lieu de d^3y, je mets l'équation sous cette forme $\frac{Add(\frac{dy}{dx})}{dx} + \ldots$ &c. $= 0$. Soit $p = \frac{dy}{dx}$, $dp = d.(\frac{dy}{dx})$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d.(\frac{dy}{dx})}{dx}$, on aura $d.(\frac{dp}{dx}) = \frac{dd.(\frac{dy}{dx})}{dx}$. Mais ddp = (Art. CCIII.) $ddp - \frac{dpddx}{dx} = dd.(\frac{dy}{dx}) - \frac{ddxddy}{dx^2}$. $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^3}$. Donc $\frac{ddp}{dx}$, ou $\frac{dd(\frac{dy}{dx})}{dx}$, ou $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^4}$. Donc enfin la valeur à substituer dans l'équation pour d^3y sera $\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^2}$.

CCV.

On trouveroit de même pour les équations du quatrieme, du cinquieme, &c. ordre, les valeurs qu'il y faudroit substituer à la place de d^4y, d^5y, &c. pour rendre ces équations completes.

CCVI.

SCHOLIE. Mais, demandera-t-on, quel avantage retirerons-nous de completer ici l'équation proposée? n'est-ce pas au contraire en rendre l'intégration plus difficile? Cet avantage est très-réel : après avoir rendu l'équation complete, nous serons les maîtres de traiter comme constante la différentielle qui facilitera le plus la réduction aux premieres différences. Quelques exemples vont nous en convaincre.

En quoi consiste l'utilité de cette méthode.

CCVII.

Soit proposée d'intégrer l'équation $dx^2\,dy - dy^3 = a\,dx\,ddy + x\,dx\,ddy$ dans laquelle dx est constant, & où l'on voudroit que dy le fût. Je rends d'abord l'équation complete, & pour cela au lieu de ddy je mets sa valeur $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$; cette substitution me donne $dx^2\,dy - dy^3 = a\,dx\,ddy - a\,dy\,ddx + x\,dx\,ddy - x\,dy\,ddx$, équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je suppose à présent que dy est constante; j'aurai donc $ddy = 0$; donc la proposée devient $dx^2 - dy^2 + a\,ddx + x\,ddx = 0$, dont l'intégrale est $x\,dx + a\,dx - y\,dy = C\,dy$.

Son application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

CCVIII.

Qu'on propose maintenant l'équation suivante, $\frac{x\,dy^2 + xy\,ddy + y\,dy\,dx}{y\,dy} = \frac{x\,x\,dx - a\,a\,dx}{a\,a + x\,x}$, dans laquelle on a traité comme constante $y\,dx$, & qu'on veut transformer en une autre dans laquelle $y\,dx$ soit variable & $x\,dy$

Second exemple plus compliqué que le premier.

constante ; puisque ydx est constante, on aura $ddy = d\left(\frac{dy}{ydx}\right) \times ydx$: c'est-à-dire $ddy = \frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$. Je substitue pour ddy cette valeur dans l'équation proposée, elle devient $\frac{xdy}{y} + dx + \frac{xydxddy}{ydydx} - \frac{xdxdy^2 - xydyddx}{ydydx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$; équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je prends maintenant pour constante xdy ; cette supposition me donne $xddy + dydx = 0$, ou bien $\frac{dxdy}{x} = -ddy$. Je substitue dans la transformée pour ddy cette valeur, & je trouve $\frac{xdy}{y} + dx - dx \frac{xdy}{y} - \frac{xddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$. Donc en réduisant on a $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$. J'integre, & j'ai $-ldx + lxdy$, ou $l\frac{xdy}{dx} = l\left(\frac{aa+xx}{x}\right)$. Donc $\frac{xdy}{dx} = \frac{aa+xx}{x}$, ou bien $xxdy = aadx + xxdx$; ou enfin $dy = \frac{aadx}{xx} + dx$. Donc $y + \frac{aa}{x} - x + C = 0$.

CCIX.

Troisieme exemple. Soit enfin proposé d'intégrer l'équation suivante $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dy^2 + dx^2}{x}$, dans laquelle ydx est constante. Pour completer cette équation, je mets au lieu de ddy sa valeur trouvée plus haut $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, & j'aurai la transformée suivante $\frac{-dxddy + dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ qui est complete. Supposons à présent que dy est constant, nous aurons $ddy = 0$, donc l'équation à intégrer est $xddx = dx^2 + dy^2$.

CCX.

Maintenant que nous sommes les maîtres de supposer toujours

toujours que dans l'équation aucune différentielle n'eſt conſtante, il eſt à propos d'examiner ſi on ne pourroit pas au moins dans certains cas déterminer quelle eſt la différentielle qui priſe pour conſtante, rendra l'équation plus facile à intégrer.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer, dans quelques cas, la différentielle qui ſuppoſée conſtante facilitera le plus l'intégration.

CCXI.

ON ne peut pas donner de regle générale pour reconnoître dans tous les cas quelle eſt la fluxion qu'on doit regarder comme conſtante, afin que l'intégration en devienne plus facile; on peut cependant ſe guider quelquefois par l'obſervation ſuivante. Je cherche ſi dans la propoſée il y a deux, trois, &c. termes qui multipliés ou diviſés par un facteur commun puiſſent s'intégrer. J'en prends l'intégrale, & c'eſt celle que je ſuppoſe conſtante.

CCXII.

Son application à quelques exemples.

Soit, par exemple, propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $X = \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$, dans laquelle X repréſente une fonction quelconque de x. J'obſerve

Premier exemple.

que dans cette équation les deux termes $dx^2dy + xdxddy$ diviſés par dx, donnent $dxdy + xddy$, dont l'intégrale eſt xdy. Je vois encore que $dx^2dy - xdyddx$ diviſés par $-xxdy$, donnent $\frac{-dx^2+xddx}{xx}$; différentielle dont l'intégrale eſt $\frac{dx}{x}$. Je puis donc également ſuppoſer pour conſtantes xdy & $\frac{dx}{x}$. Ces deux ſuppoſitions détruiront également deux termes.

Soit 1°. ſuppoſée xdy égale à une conſtante c, on aura $xddy + dydx = 0$, & multipliant par dx, $xdxddy + dydx^2 = 0$; ce qui réduit la propoſée à l'équation ſuivante $X = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3dy^3}$. Mais $xddy + dxdy = 0$ donne $dy = \frac{-xddy}{dx}$: donc en ſubſtituant pour dy cette valeur, on aura $X = \frac{-xdy^2ddy}{2x^3dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3dy^3}$, c'eſt-à-dire, $X = \frac{-xdy^2ddy - xdydxddx}{2x^3dxdy^3}$, ou $X = \frac{-dy^2ddy - dydxddx}{2x^2dxdy^3}$. Mais $xdy = c$: donc $dy = \frac{c}{x}$. Donc $X = \frac{-dyddy - dxddx}{2c^2dx}$, ou $Xdx = \frac{-dyddy - dxddx}{2cc}$, & en intégrant on a $\int Xdx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n$. Donc enfin $\int Xdx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4x^2dy^2} \pm n$.

CCXIII.

REMARQUE. Quand on eſt arrivé à l'équation $X = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3dy^3}$, on peut abreger le calcul en multipliant l'équation par dx; ce qui donne $Xdx = \frac{dx}{2x^2} - \frac{dxddx}{2x^2dy^2}$, dont l'intégrale eſt ($xdy$ étant conſtante) $\int Xdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2} \pm n$, qui eſt la même que la précédente.

CCXIV.

2°. Prenons à préſent pour conſtante $\frac{dx}{x}$; cette ſuppoſition nous donnera $\frac{x\,ddx - dx^2}{xx} = 0$, & en multipliant par $-xx\,dy$, on a $-x\,dy\,ddx + dx^2\,dy = 0$, équation qui fait évanouir le ſecond & le troiſieme terme de la propoſée. Elle devient donc $X = \frac{dy^3 + x\,dx\,ddy}{2x^3\,dy^3}$; je la multiplie par dx, ce qui me donne $X\,dx = \frac{dx\,dy^3 + x\,dx^2\,ddy}{2x^3\,dy^3}$. L'intégrale de cette équation eſt, à cauſe de $\frac{dx}{x}$ ou $\frac{dx^2}{x^2}$ qui eſt conſtante, $\int X\,dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2\,dy^2} + C$; ainſi que nous l'avons trouvé ci-deſſus.

CCXV.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $xy \times (dx\,ddy - dy\,ddx) = y\,dy\,dx^2 - yy\,dY\,dy^2 - x\,dx\,dy^2$, dans laquelle Y repréſente une fonction quelconque de y.

Je remarque que dans cette équation il y a trois termes ſavoir $yx\,dy\,ddx + y\,dy\,dx^2 - x\,dx\,dy^2$ qui diviſés par $yy\,dy$ forment une différentielle complete, $\frac{yx\,ddx + y\,dx^2 - x\,dx\,dy}{yy}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x\,dx}{y}$. Je prends donc pour conſtante $\frac{x\,dx}{y}$; ce qui me donne en différentiant $\frac{xy\,ddx + y\,dx^2 - x\,dx\,dy}{yy} = 0$. Donc la propoſée ſe réduit à $xy\,dx\,ddy + yy\,dY\,dy^2 = 0$, c'eſt-à-dire, $dY = -\frac{x\,dx\,ddy}{y\,dy^2}$, équation dont l'intégrale eſt $Y = \frac{x\,dx}{y\,dy} + C$; ce qui eſt évident, $\frac{x\,dx}{y}$ étant conſtante.

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré dans leſquelles l'une des indéterminées finies ne ſe trouve à aucun terme.

CCXVI.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Art. CXL.) que l'on pouvoit toujours intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré, lorſque l'une de leurs indéterminées finies ne s'y trouve pas ; la méthode expoſée dans cet article s'étend encore aux équations différentielles de tous les ordres. Par exemple, lorſque dans une équation différentielle du ſecond ordre l'une ou l'autre des deux indéterminées ne s'y trouve pas, & qu'il n'y entre que ſes différences premieres ou ſecondes combinées comme on le veut, & élevées à des puiſſances quelconques, il ſera toujours poſſible de parvenir à la ſéparation. Le procédé qu'il faut ſuivre pour cela conſiſte à faire la premiere différence qui eſt variable, égale à la fluxion priſe pour conſtante, multipliée par une nouvelle indéterminée.

CCXVII.

Son application à plusieurs équations du second ordre.

Premier exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydd x + adxdy}{dudy}$ dans laquelle $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est supposé constant, & l'indéterminée finie u ne se trouve pas. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = zdu$, ce qui me donne . . . . . $ddx = dzdu$. J'ai donc la transformée suivante $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydzdu + azdudy}{dudy}$, & en réduisant $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, ou $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydz + azdy$. Je divise cette équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2c^m} = adz\sqrt{y} + \frac{azdy}{2\sqrt{y}}$, équation dont l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2}).2c^m} = az\sqrt{y} \pm C$. Mais $z = \frac{dx}{du}$; donc l'intégrale cherchée est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{2mc^m + c^m} = adx\sqrt{y} \pm Cdu$.

CCXVIII.

Second exemple.

Soit maintenant l'équation à intégrer $Yyydydx^2 + duddu = 0$, dans laquelle Y représente une fonction de y, du est l'élément de la courbe, égal par conséquent à $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ydx est la fluxion prise pour constante, & dans laquelle l'indéterminée u ne se trouve pas.

Je fais . . . . . $du = zydx$

$ddu = ydzdx$,

& après la substitution l'équation est $Yy^2 dydx^2 =$

$-y^2zdzdx^2$, & en réduiſant $Ydy=-zdz$. L'intégrale de cette équation eſt $\int Ydy=-\frac{zz}{2}+C$. Mais $z^2=\frac{dx^2}{yydx^2}=\frac{dx^2+dy^2}{yydx^2}$. Donc l'intégrale cherchée ſera $dx=\frac{dy}{\sqrt{(2Cyy-1-2yy\int Ydy)}}$.

CCXIX.

Autre maniere d'intégrer les équations précédentes.

REMARQUE. On peut encore réduire aux premieres différences les équations qui ſont dans le cas des précédentes, en ſe ſervant de la ſubſtitution que nous avons employée (Art. CXL.) pour les différentielles du premier degré. Cette ſubſtitution conſiſte à égaler la premiere différence de l'indéterminée qui manque, à une nouvelle indéterminée multipliée par la premiere différence de l'autre inconnue.

CCXX.

Appliquée à l'exemple précédent.

Je reprends l'équation précédente $Yy^2dydx^2+duddu=0$; je ſuppoſe $dx=zdu$, ce qui me donne $ddx=dzdu+zddu$, d'où l'on tire $ddu=\frac{ddx-dzdu}{z}$. Après avoir ſubſtitué les valeurs dans l'équation, elle devient $Yy^2z^2dydu^2=\frac{dzdu^2-duddx}{z}$. Mais par la ſuppoſition ydx eſt conſtant; donc $yddx+dydx=0$, donc $ddx=-\frac{dydx}{y}$, ou en mettant pour dx ſa valeur, $ddx=-\frac{zdudy}{y}$. Subſtituant dans la transformée cette valeur de ddx, on a $Yy^2z^2dydu^2=\frac{dzdu^2}{z}+\frac{zdydu^2}{zy}$, & en réduiſant $Yz^2y^2dy=\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}$. Soit maintenant $yz=t$,

on a $lyz = lt$, $\frac{ydz+zdy}{yz} = \frac{dt}{t}$, & $\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$. Donc $Yt^2 dy = \frac{dt}{t}$, & $Ydy = \frac{dt}{t^3}$, équation dont l'intégrale eſt $\int Ydy = -\frac{1}{2tt} \pm C$. Maintenant $tt = z^2y^2 = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2+dy^2}$, à cauſe de $du = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc en remettant ces valeurs dans l'intégrale trouvée, on aura $2\int Ydy = \frac{-dx^2-dy^2}{yydx^2} \pm 2C$, & enfin $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy-2y^2\int Ydy-1)}}$, équation que nous avions déja trouvée par l'autre méthode.

CCXXI.

Troiſieme exemple.

Soit encore propoſé d'intégrer l'équation $Yy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$, dans laquelle je puis ſuppoſer conſtante la fluxion que je voudrai, Y eſt une fonction quelconque de y & de conſtantes.

Prenons d'abord dx conſtante, cette ſuppoſition donne $ddx = 0$, & fait diſparoître le terme $y du^2 ddx$. L'équation eſt donc $Yy^3 dy dx^2 = dy du^2 - y du ddu$. Pour la réduire je fais $du = z dx$, $ddu = dz dx$, d'où je tire la transformée ſuivante $Yy^3 dy dx^2 = z^2 dy dx^2 - yz dz dx^2$, & en diviſant par dx^2, $Yy^3 dy = z^2 dy - yz dz$, ou $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) \times z^2 y$. Pour intégrer cette équation je ſuppoſe $\frac{y}{z} = \frac{1}{t}$; je prends la différence du logarithme de cette équation, j'ai $\frac{zdy-ydz}{zz} = -\frac{dt}{t}$;

$\frac{y}{z}$ $\frac{1}{t}$

& en réduisant $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}$. Nous avons d'ailleurs $yt = z$. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) . z^2 y$, elle devient $Yy^3 dy = -\frac{dt}{t} \times y^3 t^2$, ou bien $Ydy = -t\,dt$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{tt}{2} \pm C$: mais $\frac{tt}{2} = \frac{zz}{2yy}$. Donc on a $\int Ydy = -\frac{zz}{2yy} \pm C$; & en mettant pour z sa valeur $\frac{du}{dx}$, on a $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yydx^2} \pm C$.

Si on prend du constant, alors $ddu = 0$, & l'équation $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2 ddx - ydxdudd u$ devient $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2 ddx$. Soit maintenant $dx = z\,du$, $ddx = dz\,du$, l'équation en y substituant ces valeurs devient $Yy^3 dy . z^3 du^3 = z\,dydu^3 + y\,dz\,du^3$, ou bien $Ydy = \frac{z\,dy + y\,dz}{y^3 z^3}$. Donc en intégrant on a $\int Ydy = \frac{-1}{2y^2 z^2} \pm C$, & en remettant pour z sa valeur $\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée est $\int Ydy = \frac{-du^2}{2y^2 dx^2} \pm C$, la même que nous venons de trouver.

CCXXII.

Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le second.

SCHOLIE 2. Cette méthode s'appliquera aux différentielles d'un ordre plus élevé que le second, pourvu que dans celles du troisieme ordre, par exemple, l'une & l'autre des deux variables finies x & y manquent, que dans celles du quatrieme, outre l'une des deux variables finies x, y, il manque encore l'une ou l'autre des premieres différences dx, dy avec leurs fonctions. On réduira par la même méthode les équations différentielles du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y,

& leurs deux premieres différences dx, dy, manquent; celles du ſixieme, pourvu qu'outre cela il manque encore l'une ou l'autre des ſecondes différences ddx, ou ddy, & ainſi de ſuite.

CCXXIII.

Soit l'équation $dx\,d^3y + dx^2\,d^2y = dx^4 + dy^4$, ſuſceptible, comme on le voit, de la méthode préſente, puiſque les deux indéterminées finies x & y ne s'y trouvent pas; dx eſt conſtant dans cette équation. Je fais

$$\frac{p\,dx}{a} = dy$$

& par conſéquent

$$\frac{dp\,dx}{a} = ddy,$$

$$\frac{ddp\,dx}{a} = d^3y.$$

1°. A une équation du troiſieme ordre.

Après avoir ſubſtitué ces valeurs dans la propoſée, elle devient $\frac{dx^3\,ddp}{a} + \frac{dx^3\,dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4\,dx^4}{a^4}$; donc $\frac{ddp + dx\,dp}{a} = dx^2 + \frac{p^4\,dx^2}{a^4}$, équation réduite au ſecond ordre.

Suppoſant toujours dx conſtant, je fais $\frac{q\,dx}{b} = dp$, ce qui me donne

$$\frac{dq\,dx}{b} = ddp:$$

j'ai après la ſubſtitution, $\frac{dq\,dx}{ab} + \frac{dp\,dx}{a} = dx^2 + \frac{p^4\,dx^2}{a^4}$, ou $\frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4\,dx}{a^4}$; mais $dx = \frac{b\,dp}{q}$; donc on a $\frac{b\,dp + dq}{ab} = \frac{b\,dp}{q} + \frac{bp^4\,dp}{a^4q}$, équation réduite aux premieres différences.

CCXXIV.

Soit maintenant l'équation différentielle du quatrieme ordre $d^4y + dx\,d^3y - dx^2\,d^2y = 0$, dans laquelle dx

2°. A une équation du quatrieme.

est constant, & les deux indéterminées finies x, y, avec la premiere différence dy ne se trouvent pas. Je suppose donc . . . . . $\frac{p\,dx}{a} = dy$,

& par conséquent . . . . . $\frac{dp\,dx}{a} = ddy$

$$\frac{d^2p\,dx}{a} = d^3y$$

$$\frac{d^3p\,dx}{a} = d^4y;$$

donc en substituant pour ddy, d^3y, d^4y ces valeurs, j'aurai la transformée suivante $d^3p + dx\,d^2p - dx^2dp = 0$, équation qui est dans le cas de celle de l'exemple précédent; donc en opérant comme nous venons de faire, on la ramenera aux premières différences.

CCXXV.

Cas particuliers qui se ramenent aux précédents par le choix de la constante.

Scholie 3. Parmi les équations qui ne sont pas susceptibles de la méthode précédente, parce que les deux indéterminées finies s'y trouvent, il y en a quelques-unes qu'on y peut ramener en prenant pour constante une différentielle telle que tous les termes affectés de l'une des deux indéterminées finies disparoissent, & qu'il ne reste que ceux qui contiennent l'autre.

Dans ce cas est l'équation suivante $dx^3 - dx\,dy^2 = y\,dx\,ddx + 2x\,dy\,ddy$, dans laquelle nous pouvons supposer constant ou dx, ou dy. Si nous faisons la premiere supposition, nous aurons $ddx = 0$, & par conséquent le terme $y\,dx\,ddx$ s'évanouit; si c'est dy que nous traitons comme constant, $ddy = 0$ fait disparoître

le terme $2xdyddy$; donc dans l'une & l'autre ſuppoſition il ne reſte que l'une des deux indéterminées finies.

Soit donc dx conſtant, on aura $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Je fais . . . . . $dy = \frac{pdx}{a}$

$$ddy = \frac{dpdx}{a};$$

donc en ſubſtituant j'aurai $dx^3 - \frac{p^2dx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, c'eſt-à-dire $aadx - ppdx = 2xpdp$, où $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$. Donc en intégrant on a $lx = -l(aa-pp) + lm$, & $x = \frac{m}{aa-pp}$. Je remets pour p ſa valeur $\frac{ady}{dx}$, j'ai $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$, & par conſéquent $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, ou enfin $aady^2 = aadx^2 - \frac{mdx^2}{x}$.

CCXXVI.

Autres cas particuliers qui s'y ramenent par de ſimples ſubſtitutions.

D'autres cas ſe rameneront à notre méthode par de ſimples ſubſtitutions. Soit, par exemple, $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, je fais $ydy = dz$, d'où je tire,

$$yddy + dy^2 = ddz$$
$$yydy^2 = dz^2.$$

Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura pour transformée l'équation $x^m ddx = ddz + dz^2$, dans laquelle l'une des deux indéterminées finies z ne ſe trouve pas.

CCXXVII.

Il y a encore un autre cas plus général que les précédents; c'eſt celui dans lequel on n'a que des ddy, des

dy & des dx : car alors en faiſant $dy = z\,dx$, dx étant conſtant, l'équation, comme il eſt évident, ſe ramenera toujours aux premieres différences. Maintenant nous allons expoſer une méthode générale pour ramener à notre dernier cas un très-grand nombre d'équations différentielles.

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans leſquelles l'une des deux ne ſe trouve pas.

CCXXVIII.

Fondement de cette méthode.

LA méthode que nous allons expliquer eſt fondée ſur le principe du calcul des exponentielles. Si l'on a une quantité telle que c^x, dans laquelle c déſigne un nombre dont le logarithme eſt l'unité, ſa différentielle ſera, comme nous l'avons vu dans l'Introduction, $c^x\,dx$, ſa ſeconde différence $c^x\,ddx + c^x\,dx^2$, ſa différence troiſiéme $c^x\,d^3x + 3\,c^x\,dx\,ddx + c^x\,dx^3$, & ainſi de ſuite. Or dans ces différentielles l'indéterminée finie x ne ſe trouve que dans l'expoſant. Cette conſidération fit penſer à M. Euler qui eſt l'inventeur de cette méthode, que ſi dans les équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier, on ſubſtituoit aux indéterminées des exponentielles telles que

les précédentes, les variables finies ne ſe trouveroient plus qu'aux expoſants. La difficulté ſeroit alors réduite à faire évanouir les exponentielles introduites à la place des variables. Car par ce moyen l'équation ſera délivrée de l'une de ſes indéterminées, dont il ne reſtera que les différences.

CCXXIX.

Trois cas généraux auxquels s'applique cette méthode.

La méthode réuſſira pour toutes les équations différentielles du ſecond ordre qui ſont dans un des trois cas ſuivants.

1°. Pour celles qui n'ont que deux termes & qui ſont compriſes dans la formule ſuivante,

$$ax^m dx^p - y^n dy^{p-2} ddy = 0.$$

2°. Pour toutes les équations dans leſquelles les indéterminées & leurs différences ont le même nombre de dimenſions dans chaque terme. La formule ſuivante peut les repréſenter :

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy.$$

3. Pour les équations dans leſquelles l'une des deux variables avec ſes différences a le même nombre de dimenſions dans chaque terme. Mais il faut diſtinguer deux cas; le premier, quand la premiere différentielle de l'indéterminée qui a par-tout le même nombre de dimenſions eſt conſtante; & ce cas peut ſe repréſenter par la formule,

$$Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m+2-h} = dx^m ddy,$$

dans laquelle x a dans tous les termes le nombre m de dimenſions, dx eſt conſtante, P & Q ſont des fonctions

quelconques de y. Le ſecond cas arrive lorſque c'eſt la premiere différentielle de l'autre variable, qui eſt conſtante, & ce dernier eſt compris dans la formule,
$Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m-h+1} = dx^{m-1} ddx$,
dans laquelle dy eſt conſtant, P & Q ſont des fonctions de y, x a, comme on le voit, dans chaque terme le nombre m de dimenſions.

Nous allons examiner ſéparément les quatre formules précédentes.

CCXXX.

Examen du premier cas de la méthode.

PROBLEME I. Intégrer les équations telles que $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . . $x = c^{hu}$
& . . . . . $y = c^u t$,
h eſt une quantité arbitraire qu'on déterminera dans la ſuite de l'opération, u & t ſont deux nouvelles variables.

La ſuppoſition de $x = c^{hu}$ & de $y = c^u t$, nous donne
$dx = hc^{hu} du$
$ddx = hc^{hu} \times (ddu + hdu^2)$
$dy = c^u dt + c^u t du$
$ddy = c^u \times (ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu)$.
Mais par l'hypotheſe dx eſt conſtant; on aura donc $ddx = 0$, donc auſſi $hc^{hu} \times (ddu + hdu^2) = 0$, c'eſt-à-dire, $ddu = -hdu^2$ & en ſubſtituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy, on a
$ddy = c^u \times (ddt + 2dtdu + (1-h) tdu^2)$.

Subſtituons dans la propoſée pour x, y, &c. leurs valeurs, elle devient $ac^{hmu}h^p c^{hpu}du^p = c^{nu}t^n \times (c^u dt + c^u tdu)^{p-2} \times c^u(ddt + 2dtdu + (1-h)tdu^2)$, c'eſt-à-dire, $ac^{(m+p)hu}h^p du^p = c^{(n+p-1)u}t^n \times (dt + tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (1-)tdu^2)$.

Maintenant il s'agit de déterminer h, de maniere que les exponentielles s'évanouiſſent. Or pour cela on voit bien qu'il faut que $n+p-1 = hm+hp$, ce qui donne $h = \frac{n+p-1}{m+p}$; donc l'équation précédente devient (B) $a\left\{\frac{(n+p-1)^p du^p}{(m+p)^p}\right\} = t^n.(dt+tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (\frac{m-n+1}{m+p})tdu^2)$, laquelle ne contient plus qu'une des variables finies, ſavoir t, & ſe trouve par conſéquent réduite au cas du Chapitre précédent.

Puiſqu'on trouve $h = \frac{n+p-1}{m+p}$, il eſt facile de voir que les ſubſtitutions à faire ſont $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})u}$ & $y = c^u t$, dans leſquelles on obſervera que $n+p-1$ eſt la ſomme des dimenſions de y, & $m+p$, celle des dimenſions de x. Cette remarque doit ſervir à déterminer ſur le champ dans les cas particuliers la valeur qu'on doit donner à h.

CCXXXI.

Appliquons maintenant à la formule réduite la méthode de l'Art. CCXVI. Soit $du = zdt$, on aura $ddu = dzdt + zddt$; mais la ſuppoſition de dx conſtant, nous a donné plus haut $ddu = -hdu^2$: on aura donc en mettant pour h, & pour du leurs valeurs, $ddu =$

$(\frac{1-n-p}{m+p})\,zzdt^2$: donc $(\frac{1-n-p}{m+p})\,zzdt^2 = zddt + dzdt$, d'où l'on tire $ddt = (\frac{1-n-p}{m+p})\,zdt^2 - \frac{dtdz}{z}$. Je substitue dans l'équation (B) les valeurs de du & de ddt, j'ai $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p a z^p dt^p = t^n.(dt + ztdt)^{p-2} \times$
$\left\{(\frac{1-n-p}{m+p})\,zdt^2 - \frac{dtdz}{z} + 2zdt^2 + (\frac{m-n+1}{m+p})\,zztdt^2\right\}$, ou bien en divisant par dt^{p-1}, & multipliant par z, on aura $(D)\,(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^{p+1} dt = t^n \times \left\{(1+tz)^{p-2} \times (\frac{1+2m-n+p}{m+p})\,zzdt + (\frac{m-n+1}{m+p})\,tz^2 dt - dz\right\}$, équation réduite aux premieres différences.

La supposition de $du = zdt$ & la valeur $\frac{n+p-1}{m+p}$ trouvée pour h, nous apprennent que pour réduire sur le champ l'équation proposée, il falloit faire $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})\int z dt}$
& . . . . . $y = c^{\int z dt}\, t$,
ou, ce qui revient au même, $x = c^{(n+p-1)\int z dt}$
& . . . . . $y = c^{(m+p)\int z dt}\, t$.

CCXXXII.

COROLL. De ce que nous supposons $x = c^{(n+p-1)\int z dt}$, il s'ensuit que $c^{\int z dt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$; donc $\int (zdt)\,lc = \frac{1}{n+p-1}\,lx$; donc à cause de $lc = 1$, $zdt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$. mais la supposition de $y = c^{(m+p)\int z dt}\, t$, nous donne $ly = (m+p)\int (zdt)\,lc + lt$; donc en mettant pour $\int z dt$ sa valeur en x, on a $ly = (\frac{m+p}{n+p-1})\,lx + lt$; donc $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}} t$, & $t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$; donc $dt =$

$x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) \times yx^{-\left(\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}\right)} dx$. Donc en mettant pour dt cette valeur dans l'équation $z\,dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$, on aura $z\,x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) yzx^{-\left(\frac{m+n-2p-1}{n+p-1}\right)} dx = \frac{dx}{(n+p-1)x}$; donc enfin $z = \frac{dx}{(n+p-1)\,x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p)\,yx^{-\left(\frac{m-3p}{n+p-1}\right)} dx}$.

Donc il eſt évident que ſi nous avons la valeur de z en t, ou celle de t en z, on pourra trouver le rapport de x à y.

Appliquons la méthode précédente à quelques exemples particuliers.

CCXXXIII.

Application de la formule à deux exemples particuliers.

Soit l'équation $x\,dx\,dy = y\,ddy$ dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec la formule, j'ai

$$a = 1$$
$$m = 1$$
$$p = 1$$
$$n = 1.$$

Mettant donc ces valeurs dans l'équation différentielle du premier degré (D) trouvée plus haut, on a $\frac{zz\,dt}{2} = t\,(1+tz)^{-1} \times (\frac{1}{2}z^2\,dt + \frac{1}{2}tz^3\,dt - dz)$; ou en réduiſant $z^2\,dt + tz^3\,dt = 3tz^2\,dt + z^3t^2\,dt - 2t\,dz$.

CCXXXIV.

Soit encore propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $\frac{a\,dx}{x} = \frac{ddy}{y\,dy}$, dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec notre formule, on trouve

$$p = 1$$
$$n = -1$$
$$m = -1;$$

on auroit donc dans le cas préſent $p+m=0$, donc tous les termes de l'équation réduite ſeroient infinis, & par conſéquent la méthode ne peut ſervir dans ce cas.

Mais alors l'intégration eſt facile. Car on a $xddy = aydydx$; mais dx conſtant donne $ddx=0$: donc l'intégrale du premier membre eſt $xdy-ydx$, & celle du ſecond eſt $\frac{ayydx}{2}$. Donc on aura $\frac{xdy-ydx}{yy} = \frac{adx}{2} + Cdx$.

CCXXXV.

Seconde partie de la méthode.

PROBLEME 2. Intégrer les équations qui ſe rapportent à la formule générale $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . . $x = c^u$

$$y = c^u t$$

j'aurai . . . . . $dx = c^u du$,

& comme dx eſt conſtant, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$; c'eſt-à-dire, $ddu = -du^2$, on a auſſi

$$dy = c^u dt + c^u t du$$
$$ddy = c^u.(ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu);$$

& à cauſe que nous avons $ddu = -du^2$,

$$ddy = c^u.(ddt + 2dudt).$$

Subſtituant ces valeurs dans la formule, elle devient $ddt + 2dudt = at^{-m-1} du^p \times (dt+tdu)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q.(dt+tdu)^{2-q}$, équation dans laquelle ne ſe trouve pas l'indéterminée finie u.

Je ſuppoſe donc $du = z\,dt$, ce qui me donne $ddu = dz\,dt + z\,ddt$. Mais $ddu = -du^2 = -z\,z\,dt^2$; donc $ddt = -\frac{dz\,dt}{z} - z\,dt^2$. Donc on aura l'équation ſuivante $at^{-m-1}z^p\,dt^p.(dt+zt\,dt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q\,dt^q.(dt+zt\,dt)^{2-q} = -\frac{dz\,dt}{z} + z\,dt^2$, ou bien (A) $at^{-m-1}z^p\,dt.(1+zt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q\,dt.(1+zt)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + z\,dt$, équation différentielle du premier ordre : d'où je conclus que je pouvois réduire tout de ſuite la propoſée en faiſant . . . . . $x = c^{\int z\,dt}$

$y = c^{\int z\,dt}.t$.

Ces deux ſuppoſitions nous donnent $dx = c^{\int z\,dt}z\,dt$ & $dy = c^{\int z\,dt}dt + c^{\int z\,dt}zt\,dt$; donc $ddx = c^{\int z\,dt} \times (z\,ddt + dz\,dt + z\,z\,dt^2)$: mais dx étant conſtant, $ddx = 0$, donc $z\,ddt + dz\,dt + z\,z\,dt^2 = 0$, & $ddt = -z\,dt^2 - \frac{dz\,dt}{z}$, & par conſéquent on aura $ddy = c^{\int z\,dt} \times (z\,dt^2 - \frac{dz\,dt}{z})$.

Appliquons cette formule à quelques exemples.

CCXXXVI.

Soit l'équation $x\,dx\,dy - y\,dx^2 = yy\,ddy$. Pour la comparer avec la formule, je l'écris ainſi $xy^{-2}\,dx\,dy - y^{-1}\,dx^2 = ddy$. J'ai donc, Application à un exemple.

$a = 1$
$m = 1$
$p = 1$
$n = 0$
$b = -1$
$q = 2$.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation (A) elle devient $t^{-2}zdt \times (1+zt) - t^{-1}zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, ou $\frac{zdt+zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = -\frac{dz+zzdt}{z}$; ou $zzdt + z^3tdt - z^3tdt = -ttdz + zzttdt$. Donc en réduiſant on a $zzdt - zzttdt = -ttdz$. Donc $dt - \frac{dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$, & en intégrant $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + C$; c'eſt-à-dire $ttz + z = -t + Ctz$. Mais par les ſubſtitutions $z = \frac{du}{dt}$; donc l'équation $Ctz - t = ttz + z$ devient ici $Ctdu - tdt = ttdu + du$, ou (E) $du = \frac{tdt}{Ct - tt - 1}$. D'un autre côté la ſuppoſition de $c^u = x$ donne $ulc = lx$, & à cauſe que $lc = 1$, $du = \frac{dx}{x}$; on aura auſſi $y = c^u t = xt$, donc $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$. Subſtituons dans ($E$) pour du, dt, t leurs valeurs, on aura $ydy + xdx = Cydx$, équation au cercle dans le cas où $C = 0$.

CCXXXVII.

SCHOLIE. La formule que nous venons de traiter dans le Problême précédent n'a que trois termes: on pourroit y en ajouter tant d'autres qu'on voudroit, pourvu toutesfois qu'ils euſſent les conditions énoncées Art. CCXXIX. Pour ne laiſſer aucun doute ſur cet article, nous allons appliquer la méthode à un exemple qui a plus de trois termes.

Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes.

Soit propoſée l'équation ſuivante $y^2dx^3 + x^2dy^3 - yxdxdy^2 - yxdydx^2 + yx^2dxddy - xy^2dxddy = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. Je ſuppoſe, ainſi que

je l'ai fait plus haut, ... $x = c^u$

$y = c^u t$,

j'aurai . . . . . $dx = c^u du$

$dy = c^u.(dt + tdu)$;

& à cauſe que $ddx = 0$, $ddy = c^u \times (ddt + 2dudt)$. Je ſubſtitue pour x, y, dx, dy, ddy leurs valeurs dans l'équation, je trouve la transformée ſuivante après les réductions ordinaires (F) $dt^3 + 2tdudt^2 - ttdtdu^2 + tdtdu^2 + tduddt - ttduddt = 0$, dans laquelle on voit bien que l'indéterminée finie u ne ſe trouve pas.

Je fais donc . . . . . $du = zdt$,

j'en tire $ddu = dzdt + zddt$, ou parce que $ddx = 0$ donne $ddu = -du^2$, $-du^2 = dzdt + zddt$, donc $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Donc enfin après avoir ſubſtitué ces valeurs dans (F), on aura la réduite $dt + 2tzdt - tdz + ttdz = 0$, ou bien $(tt - t)dz + 2ztdt + dt = 0$, équation réduite au cas général du Chapitre VII.

Si on applique à cette équation les regles que nous avons données dans ce Chapitre, on trouvera pour ſon intégrale $(t-1)^2 z + t - lt = C$.

Cherchons maintenant au moyen de cette intégrale le rapport de x à y. La ſuppoſition de $du = zdt$ donne $z = \frac{du}{dt}$; donc l'intégrale trouvée devient $(t-1)^2 du + tdt - dtlt = Cdt$, ou $du = \frac{Cdt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$, équation dont l'intégrale eſt en ajoutant la conſtante A, (G) $u = \frac{t - C - tlt + At - A}{t-1}$. Mais la ſuppoſition de $x = c^u$ donne $u = lx$, & comme on ſuppoſe auſſi $y = c^u t$, on

aura $y = tx$, & $t = \frac{y}{x}$. Donc l'intégrale (G) devient $lx = \frac{y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay}{y - x}$. Donc $ylx - xlx = y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay$. Donc enfin en réduisant & supposant . . $-C-A = m$

& . . . . . $A+1 = n$,

on a . . . . . $mx+ny = yly - xlx$.

CCXXXVIII.

Troisieme partie de la méthode.

Comprend deux cas.

La troisieme partie de la méthode comprend, ainsi que nous l'avons dit plus haut, toutes les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a dans chaque terme le même nombre de dimensions. Nous avons dit aussi qu'il falloit distinguer deux cas; le premier, quand on a pour constante la premiere différence de l'indéterminée qui a le même nombre de dimensions à tous les termes; le second lorsque c'est la premiere différence de l'autre indéterminée qui est constante. Nous traiterons ces deux cas séparément.

CCXXXIX.

Premier cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$.

PROBLEME 3. Intégrer les équations représentées par la formule $Px\ dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, dans laquelle la somme des exposants de x & de dx est m dans tous les termes, dx est constant & P, Q sont des fonctions quelconques de y.

SOLUTION. Je suppose . . . . $x = c^u$,

ce qui me donne . . . . . $dx = c^u du$

& . . . . . $ddu = -du^2$;

je ſubſtitue ces valeurs dans la formule, & je la diviſe par z^{mu}, qui ſe trouve à tous les termes, j'ai la transformée (I) $Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, laquelle ne contient point u.

Je fais donc $du = zdy$, $ddu = dzdy + zddy$: mais $ddu = -du^2$ & $du^2 = zzdy^2$; donc $zddy + dzdy = -zzdy^2$, & par conſéquent $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs l'équation (I) devient $Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$, & diviſant par dy^{m+1}, (L) $Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$, équation réduite aux premieres différences. Il eſt évident qu'on auroit réduit tout de ſuite la propoſée, ſi on eût fait $x = c^{\int z dy}$. Cette ſuppoſition nous eût donné $dx = c^{\int z dy} zdy$, $ddx = c^{\int z dy} . (dzdy + zddy + z^2 dy^2)$: or $ddx = 0$, donc on auroit eu $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$, comme on l'a trouvé plus haut.

Application de la formule à un exemple.

Appliquons cette formule à un cas particulier qui ait plus de trois termes.

CCXL.

Qu'on ait à intégrer l'équation $2adx^2 dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, dans laquelle dx eſt conſtant. Soit . . . . . $x = c^{\int z dy}$

$$dx = c^{\int z dy} zdy$$

. . . . . $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$.

Subſtituons pour x, dx, ddy, ces valeurs dans l'équation, elle devient $2ac^{2\int z\,dy}z^2\,dy^3 - ac^{2\int z\,dy}z^2\,dy^3 - ac^{2\int z\,dy}\,dz\,dy^2 = 2c^{2\int z\,dy}z\,dy^3 - 2c^{2\int z\,dy}z\,dy^3 - \frac{2c^{2\int z\,dy}\,dz\,dy^2}{z}$, & en diviſant par $c^{2\int z\,dy}\,dy^2$ qui ſe trouve à tous les termes, on a après la réduction $az^2\,dy - a\,dz = -\frac{2\,dz}{z}$, ou bien $a\,dy = \frac{az\,dz - 2\,dz}{z^3}$. L'intégrale de cette équation eſt $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. Maintenant la ſuppoſition $x = c^{\int z\,dy}$ nous donne $lx = \int z\,dy$, & $\frac{dx}{x} = z\,dy$: donc $z = \frac{dx}{x\,dy}$. Remettant dans l'intégrale pour z cette valeur, nous aurons l'équation réduite

$$ay\,dx^2 = xx\,dy^2 - ax\,dx\,dy + C\,dx^2.$$

Je paſſe au ſecond cas.

CCXLI.

Second cas repréſenté par la formule $Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\,ddx$.

PROBLEME 4. Intégrer les équations contenues dans la formule $Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\,ddx$, dans laquelle dy eſt conſtant, P & Q ſont des fonctions de y.

SOLUTION. Je fais comme ci-deſſus $x = c^u$

$$dx = c^u\,du$$

$$ddx = c^u.(ddu + du^2).$$

Suivant ces ſubſtitutions dans la formule, nous aurons $(M)\ Pdy^{m+1} + Qdu^n\,dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1}\,ddu$ laquelle ne contient plus u. Nous avons diviſé par c^{mu} qui multiplioit tous les termes.

Je ſuppoſe donc . . . . . $du = z\,dy$

dy

dy étant conſtant, on a . . . . . $ddu = dzdy$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (M), elle devient $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, & en diviſant par dy^m, $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, équation différentielle du premier ordre à laquelle on parviendroit ſur le champ en faiſant $x = c^{\int z dy}$.

Je paſſe à un exemple.

CCXLII.

Application de cette formule à un exemple.

Soit propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $2dxdy = addx - yddx$, dans laquelle dy eſt conſtant. Je fais $x = c^{\int z dy}$

$$dx = zdyc^{\int z dy}$$

$$ddx = c^{\int z dy} \times (z^2 dy^2 + zd^2 y + dzdy).$$

Mais comme dy eſt conſtant, $ddy = 0$, donc $ddx = c^{\int z dy} \times (zdy^2 + dzdy)$. Faiſant ces ſubſtitutions dans la propoſée, nous aurons $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$; & diviſant par dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, équation réduite aux premieres différences.

CCXLIII.

Remarque. Cette équation nous a ſervi pour faire voir l'application de notre méthode; mais on peut la réduire tout de ſuite: car on a $2dxdy + yddx = addx$, dont l'intégrale dy étant conſtant, $ydx + xdy = adx + Cdy$.

CHAPITRE VI.

Application de la méthode du Chapitre XV. aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Chap. XV.) comment, au moyen des coefficiens indéterminés, on intégroit un nombre n d'équations différentielles du premier ordre qui renferment un nombre n d'indéterminées x, y, z, u, &c. multipliées par des conſtantes & par une même fonction de t, avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}$, &c. auſſi multipliées par des conſtantes & par une fonction de t qui ſoit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque θ, θ', &c. de la variable t. Cette même méthode s'étend aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

Si l'on a un nombre n d'équations différentielles contenant un nombre n de changeantes x, y, z, &c. multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque θ de t avec leurs différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, auſſi multipliées par des conſtantes & par θ; & les différences ſecondes $\frac{ddx}{dt^2}, \frac{ddy}{dt^2}$, &c. multipliées de même par des conſtantes & par θ, & ainſi de ſuite juſqu'aux différences

$\frac{d^r x}{dt^r}$, $\frac{d^r y}{dt^r}$, $\frac{d^r z}{dt^r}$ d'un degré quelconque r; que de plus chacune de ces équations contienne, ſi l'on veut, une fonction quelconque θ', θ'' de t; voici la méthode qu'il faudra ſuivre pour parvenir à l'intégration.

CCXLV.

On fera . . . . . $d^{r-1}x = u\,dt^{r-1}$ — Procédé de la méthode.

$d^{r-2}x = u'\,dt^{r-2}$

$d^{r-1}y = u''\,dt^{r-1}$

$d^{r-2}y = u''\,dt^{r-2}$, &c.

Par ces ſubſtitutions on changera les équations données en d'autres équations qui ſeront au nombre de $n + (n-1)r$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, &c. u, u', u'', u''', &c. avec leurs premieres différences ſeulement dx, dy, dz, du, du', du'', du'''. Ces équations alors s'intégreront en les multipliant toutes excepté la premiere, par des coefficients indéterminés différents, & pratiquant enſuite les autres opérations que preſcrit la méthode du Chapitre XV. Nous allons appliquer ces principes à quelques exemples.

CCXLVI.

Soit $n = 2$, $r = 4$, enſorte qu'on ait à intégrer les deux équations ſuivantes $d^4y + b\,d^3y\,dt + c\,d^2y\,dt^2 + e\,dy\,dt^3 + f\,dx\,dt^3 + g\,d^2x\,dt^2 + h\,d^3x\,dt + i\,d^4x + \ldots\,dt^4 = 0$, & $d^4y + \epsilon\,d^3y\,dt + \varkappa\,d^2y\,dt^2 + \varsigma\,dy\,dt^3 + \ldots$ — Son application à des exemples. Premier exemple.

$\varphi dx dt^3 + \gamma d^2x dt^2 + \lambda d^3x dt + \mu d^4x + \tau dt^4 = 0.$

Je ſuppoſe alors . . . . . $d^3y = z dt^3$

$d^2y = p dt^2$

$dy = q dt$

$d^3x = u dt^3$

$d^2x = r dt^2$

$dx = s dt,$

z, p, q, r, s, u étant de nouvelles indéterminées. Faiſant dans les deux équations propoſées les transformations précédentes, on a $dt^3 dz + bz dt^4 + cp dt^4 + eq dt^4 + fs dt^4 + gr dt^4 + hu dt^3 + i dt^3 du + \theta dt^4 = 0$, & $dt^3 dz + \epsilon z dt^4 + \varkappa p dt^4 + \iota q dt^4 + \varphi s dt^4 + \gamma r dt^4 + \lambda u dt^4 + \mu dt^3 du + \tau dt^4 = 0$. Mais au lieu de $d^3y = z dt^3$ on peut mettre $dp = z dt$; au lieu de $d^2y = p dt^2$, $dq = p dt$; au lieu de $d^3x = u dt^3$, $dr = u dt$; au lieu de $d^2x = r dt^2$, $ds = r dt$. Donc on aura les huit équations ſuivantes:

$dz + i du + (bz + cp + eq + fs + gr + hu + \theta) dt = 0$

$dz + \mu du + (\epsilon z + \varkappa p + \iota q + \varphi s + \gamma r + \lambda u + \tau) dt = 0$

$dx - s dt = 0$

$dy - q dt = 0$

$ds - r dt = 0$

$dq - p dt = 0$

$dr - u dt = 0$

$dp - z dt = 0.$

Les équations ſont réduites à l'état qu'exige la méthode du Chapitre XV. il eſt maintenant facile de la leur appliquer.

CCXLVII.

Soit encore l'équation $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{bddy}{dt^2} + \frac{cdy}{dt} + Ky + T = 0$, T étant une fonction de t. Je mets l'équation ſous cette forme $d^3y + bd^2ydt + cdydt^2 + Kydt^3 + Tdt^3 = 0$, & j'ai $n = 1$, $r = 3$. Je fais donc $ddy = xdt^2$ Second exemple.

$$dy = zdt;$$

différentiant cette derniere équation, & ſuppoſant dt conſtant, on aura $ddy = dzdt$; donc $dzdt = xdt^2$ ou $dz = xdt$. Donc nous aurons les deux équations ſuivantes . . . . . $dz - xdt = 0$

$$dy + zdt = 0.$$

Mettant dans la propoſée pour d^3y, ddy, dy leurs valeurs tirées des équations précédentes, & ſuppoſant toujours dt conſtant, nous aurons $dt^2dx + bxdt^2 + czdt^2 - Kydt^3 + Tdt^3 = 0$ & $dx + bxdt + czdt + Kydt + Tdt = 0$, équation réduite au cas de l'Art. CLXXV. Voilà donc les trois équations ſur leſquelles nous devons opérer.

Selon ce qui eſt dit (Chap. XV.) je multiplie la ſeconde de ces équations par un coefficient indéterminé μ, & la troiſieme par un autre coefficient indéterminé ν. J'aurai donc $dx + (bx + cz + Ky + T)dt = 0$

$$\nu dy - \nu zdt = 0.$$

$$\mu dz - \mu xdt = 0.$$

J'ajoute enſemble ces trois équations de la façon ſuivante (A) $dx + \nu dy + \mu dz + ((b - \mu)x + (c - \nu)z +$

$Ky + T)\,dt = 0$. Soit maintenant $bx - \mu x + cz - \nu z + Ky = Rx + R\nu y + R\mu z$, j'aurai en comparant terme à terme . . . . . $b - \mu = R$

$$c - \nu = R\mu$$

$$K = R\nu.$$

Donc $b - \mu = \frac{c-\nu}{\mu} = \frac{K}{\nu}$. Donc $(b-\mu)\mu = c - \nu$ & $(b-\mu)\nu = K$. Donc l'équation (A) devient $dx + \nu\,dy + \mu\,dz + (x + \nu y + \mu z)\cdot(b-\mu)\,dt + T\,dt = 0$. Soit $x + \nu y + \mu z = u$, on aura $du + (b-\mu)u\,dt + T\,dt = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII. . . . . .

Nous avons maintenant $\mu\mu - b\mu = \nu - c$, ou $\mu = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\nu - c + \frac{bb}{4})}$ & $\frac{b}{2} + \sqrt{(\nu - c + \frac{bb}{4})} = \frac{K}{\nu}$; donc $\nu - c + \frac{bb}{4} = \frac{KK}{\nu\nu} - \frac{bK}{\nu} + \frac{bb}{4}$. Donc $\nu^3 - c\nu\nu + Kb\nu = KK$. Soient n, n', n'' les trois valeurs de ν, on aura en supposant que m, m', m'' sont les trois valeurs correspondantes de μ, on aura, dis-je,

$$du + (b-m)u\,dt + T\,dt = 0$$

$$du + (b-m')u\,dt + T\,dt = 0$$

$$du + (b-m'')u\,dt + T\,dt = 0,$$

& encore . . . . . $x + ny + mz = u$

$$x + n'y + m'z = u'$$

$$x + n''y + m''z = u''.$$

Des trois premières équations on tirera la valeur de u en t, & les trois secondes nous donneront celles de x, y, z. Donc enfin on aura la valeur de y en t.

CCXLVIII.

REMARQUE. Cette méthode peut s'abréger en certains cas, par exemple, ſi on a $d^4y + Aydx^4 + Xdx^4 = 0$, au lieu d'employer quatre équations du premier degré, on peut ſe contenter de deux du ſecond $ddy = udt^2$

$$ddu = Aydt^2,$$

leſquelles ſe réduiſent à une équation du ſecond degré, & celle-ci à deux du premier.

CHAPITRE VII.

Expoſition d'une méthode pour conſtruire ces mêmes équations $\frac{a\,d^n y}{dx^n} + \frac{b\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{g\,d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en y ſuppoſant* $X = 0$.

CCXLIX.

DAns le Tome VII. des *Miſcellanea Berolinenſia*, M. Euler donne une méthode pour conſtruire ces mêmes équations $\frac{a\,d^n y}{dx^n} + \frac{b\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots$ &c. $+ X = 0$, en y ſuppoſant toutesfois $X = 0$. Voici le procédé de cette méthode. Procédé de cette méthode.

Il fait . . . . . $y = Ac^{fx}$

$$dy = Ac^{fx} f dx$$

$$ddy = Ac^{fx} ff dx^2$$

$$d^n y = Ac^{fx} f^n dx^n,$$

Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{hd^{n-3}y}{dx^{n-3}}$ + &c. $+ y = 0$ nous donnent la transformée ſuivante $\frac{Aac^{fx}f^n dx^n}{dx^n} + \frac{Abc^{fx}f^{n-1}dx^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{Agc^{fx}f^{n-2}dx^{n-2}}{dx^{n-1}} + \frac{Ahc^{fx}f^{n-3}dx^{n-3}}{dx^{n-3}}$ + &c. . . . $+ Ac^{fx} = 0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, on a $af^n + bf^{n-1} + gf^{n-2} + hf^{n-3}$ + &c. . . . $+ 1 = 0$. Il ne s'agit donc que de réſoudre cette derniere équation; & cette ſolution nous donnera autant de valeurs particulieres de y, que l'équation aura de racines. On ajoutera enſemble toutes ces valeurs de y, & on aura l'intégrale complete de la propoſée. C'eſt ce que nous allons développer en ramenant à des cas particuliers l'équation générale.

CCL.

Examen des différents cas qui peuvent arriver.

Suppoſons $n = 2$, l'équation à intégrer ſera $\frac{addy}{dx^2} + \frac{bdy}{dx} + y = 0$; & en mettant pour y ſa valeur Ac^{fx}, & en réduiſant on a $Ac^{fx}.(1 + bf + aff) = 0$. Que les valeurs de cette équation ſoient f & f', j'aurai $y = Ac^{fx}$ & $y = Bc^{f'x}$. Or chacune de ces valeurs de y ſubſtituée dans l'équation la rend égale à zéro; je dis de plus que la ſomme de ces deux valeurs donne de même un réſultat égal à zéro. Car on aura $Ac^{fx}.(1 + bf + aff) = 0$ & $Bc^{fx}.(1 + bf' + af'f') = 0$ dans leſquelles tout ſe détruira par des ſignes contraires. Donc la ſomme

de

de ces deux valeurs ſubſtituée dans l'équation fera auſſi évanouir tous les termes. Donc il faudra ſuppoſer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx}$, & cette ſuppoſition renferme tous les cas, A étant $= 0$, $B = 0$, & A & B ayant une valeur.

Si $n = 3$, on trouvera par la même méthode, qu'il faut ſuppoſer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx} + Dc^{fx}$, A, B, D étant des coefficiens tout-à-fait arbitraires, & ainſi de ſuite.

CCLI.

Lorſque f a ſes valeurs égales, l'équation alors ſera repréſentée par $ffy - \frac{2fdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Soit $y = c^{fx}u$, on aura $dy = c^{fx}du + fuc^{fx}dx$, & en ſuppoſant dx conſtant, $ddy = c^{fx}ddu + 2fc^{fx}dxdu + ffuc^{fx}dx^2$. Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura la transformée ſuivante $ffc^{fx}u - \frac{2fc^{fx}du}{dx} - \frac{2ffc^{fx}udx}{dx} + \frac{c^{fx}ddu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{ffc^{fx}udx^2}{dx^2} = 0$. Donc en effaçant ce qui ſe détruit, on a $ddu = 0$. Donc $du = cdx$, $u = cx + \alpha$. Donc lorſque $1 + bf + aff = 0$ eſt un quarré, il faut ſuppoſer $y = (\alpha + cx)c^{fx}$.

CCLII.

Lorſque dans une équation différentielle du troiſieme ordre, f aura ſes trois valeurs égales, on trouvera par la même méthode qu'on doit alors ſuppoſer $y = (\alpha + cx + \gamma xx)c^{fx}$. Car dans ce cas on aura l'équation ſuivante à intégrer $f^3y - \frac{3f^2dy}{dx} + \frac{3fddy}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Soit, comme ci-

dessus, $y = uc^{fx}$, $d^3y = c^{fx}d^3u + 3fc^{fx}dxddu + 3ffc^{fx}dx^2du + f^3uc^{fx}dx^3$. Après avoir substitué pour y, dy, d^2y, d^3y leurs valeurs, on trouve $d^3u = 0$; donc $ddu = Adx^2$; $du = Axdx + Bdx$ & $u = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$. Donc enfin $y = uc^{fx} = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)c^{fx}$.

CCLIII.

Donc en général si f avoit un nombre k de racines égales, il faudroit supposer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx + \delta x^3 + \ldots + \lambda x^{k-1})c^{fx}$. Ce qui est évident par ce qui précede.

CCLIV.

Maintenant si f a des valeurs imaginaires, ces imaginaires, comme on le sait, iront toujours en nombre pair. Ainsi supposons que dans l'équation $1 + bf + aff = 0$, on ait $\frac{b}{2\sqrt{a}} < 1$, alors on aura (Art. LXXXI. Introd.) $f = m + n\sqrt{-1}$ & $f' = m - n\sqrt{-1}$. Donc il faudra supposer $y = Ac^{mx+nx\sqrt{-1}} + Bc^{mx-nx\sqrt{-1}} = (Ac^{nx\sqrt{-1}} + Bc^{-nx\sqrt{-1}})c^{mx}$. Si l'on suppose A & B réelles & égales & $= P$, cette quantité deviendra réelle; & dans ce cas on aura (Art. XLVI. Introd.) $y = c^{mx} \times 2P.\ \text{cos.}\ nx$. Elle sera encore réelle si on suppose A & B imaginaires & de différents signes. Soit, par exemple, $A = Q\sqrt{-1}$, $B = -Q\sqrt{-1}$, on aura $y = c^{mx}.(Q\sqrt{-1}.c^{nx\sqrt{-1}} - Q\sqrt{-1}.c^{-nx\sqrt{-1}}) =$ (Art. XLV. Introd.) $c^{mx}.2\sqrt{-1}.Q\sqrt{-1}.\text{sin.}\ nx = c^{mx} \times -2Q.\ \text{sin.}\ nx$. Nous venons de trouver plus haut $y = c^{mx}$

$2P$. cof. nx. Donc en général $y = c^{mx}$. ſin. $(nx + R)$. Donc l'intégrale cherchée eſt $y = Hc^{mx}$. ſin. $(nx + R)$. Car prenons un angle R dont le ſinus ſoit au co-ſinus, comme $2P$ eſt à $-2Q$, on aura ſin. R : cof. R :: $2P$: $-2Q$. Donc ſin. $R = \frac{2P}{H}$ & cof. $R = -\frac{2Q}{H}$. Donc $2P = H$. ſin. R & $-2Q = H$. cof. R. Mettant ces valeurs dans $2P$. cof. $nx - 2Q$. ſin. nx, on aura H. ſin. R. cof. $nx + H$. cof. R. ſin. $nx = H \times$ (ſin. R cof. $nx +$ cof. R. ſin. nx) = (Art. XLIX. N°. 2. Introduct.) H. ſin. $(nx + R)$.

Appliquons maintenant cette méthode à quelques exemples.

CCLV.

Application de la méthode à une équation différentielle du ſecond ordre.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{K\,ddy}{dx^2} = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. Je ſuppoſe $y = Ec^{fx}$; j'aurai la transformée ſuivante $AEc^{fx} + \frac{BEc^{fx}f\,dx}{dx} + \frac{KEc^{fx}ff\,dx^2}{dx^2} = 0$; & en réduiſant $A + Bf + Kff = 0$. Cette équation a deux racines, toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires.

1°. Les racines ſont réelles, quand BB eſt $> 4AK$. Dans ce cas les deux racines ſont $f = \frac{-B \pm \sqrt{(BB - 4AK)}}{2K}$. Donc l'intégrale cherchée eſt (Art. CCXLIX.) $y = \alpha c^{-\frac{Bx + x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}} + \varepsilon c^{-\frac{Bx - x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}}$.

Il y a encore un cas particulier à diſtinguer ici, c'eſt celui dans lequel on auroit $BB = 4AK$. Car alors $A + 2f\sqrt{4AK} + Kff = 0$ ſeroit un quarré, celui de $\sqrt{A}$

$+fV K$. Donc les racines seroient égales. Donc (Art. CCLI.) on auroit $y=(\alpha+\epsilon x)\,c^{-xV\frac{A}{K}}$. Car la supposition de $BB=4AK$ donne $B=2V\overline{AK}$ & $f=-\frac{B}{2K}$. Donc $y=(\alpha+\epsilon x)\,c^{-xV\frac{A}{K}}$ sera l'intégrale de l'équation $Ay+\frac{2dyV AK}{dx}+\frac{Kddy}{dx^2}=0$.

2°. Soit maintenant $BB<4AK$, dans ce cas les racines seront imaginaires. On aura donc $m=-\frac{B}{2K}$, $\pm nV-1=\frac{V(BB-4AK)}{2K}$ & $n=\frac{V(4AK-BB)}{2K}$. Donc en comparant cette valeur avec la formule $y=Hc^{mx}$ sin. $(nx+R)$, on aura l'intégrale suivante $y=Hc^{-\frac{Bx}{2K}}$. sin. $(x\frac{V(4AK-BB)}{2K}+R)$.

CCLVI.

Son application à une équation du troisieme ordre.

Soit encore à intégrer l'équation suivante $y-\frac{3a^2ddy}{dx^2}+\frac{2a^3d^3y}{dx^3}=0$; je supposerai $y=Ac^{fx}$, ce qui me donne la transformée suivante $1-3aaff+2a^3f^3=0$. Les facteurs de cette équation sont $(1+2af)$ & $(1-af)^2$. Le premier nous donne $f=-\frac{1}{2a}$, d'où l'on tire $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}$. Le second a ses deux valeurs égales, on aura $f=\frac{1}{a}$, & par conséquent $y=(\alpha+\epsilon x)c^{\frac{x}{a}}$. Donc l'intégrale complete sera $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}+(\alpha+\epsilon x)c^{\frac{x}{a}}$.

CCLVII.

A une équation d'un ordre n quelconque.

Enfin soit proposé d'intégrer l'équation suivante $\frac{d^ny}{dx^n}$

$= 0$; la ſuppoſition de $y = Ac^{fx}$ donne ici $f^n = 0$. Donc f a toutes ſes racines égales. Donc ſuivant ce que nous avons dit plus haut, il faudra faire $y = (a + bx + cxx + \ldots$ &c.$) c^{fx}$. Mais $f = 0$ donne $c^{fx} = c^0 = 1$. Donc la ſuppoſition ſe réduit à $y = a + bx + cxx + ex^3 + \ldots + px^{n-1}$.

Et en effet c'eſt ce qu'on trouvera de même, en prenant ſucceſſivement autant d'intégrales que n contient d'unités. Soit $n = 4$, la propoſée ſera $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, dx étant conſtant, on aura pour intégrale $\frac{d^3y}{dx^3}$, que l'on ſuppoſera égale à une conſtante de cette forme $\frac{a}{dx}$; ce qui fournit l'équation ſuivante $d^3y = adx^3$; & enſuite $ddy = axdx^2 + bdx^2$; $dy = \frac{ax^2dx}{2} + bxdx + cdx$. Donc enfin $y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f$.

CHAPITRE VIII.

Comparaiſon de la Méthode expoſée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI.

CCLVIII.

Démonſtration de la Méthode précédente.

TElle eſt la méthode donnée par M. Euler pour la ſolution des équations renfermées dans la formule $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}} +$ &c. $= 0$. Cette méthode

peut paroître plus ſimple que celle qui réſulte de la ſolution générale expoſée dans le Chapitre VI. Mais la Méthode de M. d'Alembert rapprochée de celle de M. Euler en démontre la généralité. En effet on ne voit pas clairement que l'intégration ne réuſſira qu'en faiſant $y = Ac^{fx}$; au lieu que la ſolution énoncée ci-deſſus qui donne la valeur de y, nous montre avec évidence que y doit en effet être exprimée par un certain nombre de termes $Ac^{fy} + Bc^{gx} + Dc^{hx} +$ &c.

Car dans les cas, par exemple, où l'équation eſt du troiſieme degré, telle que $d^3y + bddy\,dx + cdy\,dx^2 + Ky\,dx^3 = 0$, en faiſant, $ddy = p\,dx^2$

$$dy = z\,dx,$$

& pratiquant les opérations expoſées (Art. CCXLV.) on aura les trois équations ſuivantes,

$$dp + bp\,dx + cz\,dx + Ky\,dx = 0$$
$$dz - p\,dx = 0$$
$$dy - z\,dx = 0;$$

& enſuite .... $dp + (bp + cz + Ky)\,dx = 0$

$$v\,dy - vz\,dx = 0$$
$$\mu\,dz - \mu p\,dx = 0.$$

Donc $dp + v\,dy + \mu dz + \{(b-\mu)p + (c-v)z + Ky\}\,dx = 0$. Donc en ſuppoſant $(b-\mu)p + (c-v)z + Ky = Rp + Rvy + R\mu z$, & $p + vy + \mu z = u$, on aura $\frac{du}{u} = (\mu - b)\,dx$. Donc en faiſant pour les valeurs de v & de μ les mêmes calculs que dans l'article CLXXV. on trouvera ..... $p + ny + mz = u$

$$p + n'y + m'z = u'$$
$$p + n''y + m''z = u'',$$

& de plus . . . . . $du + \rho u\,dx = 0$
$$du' + \rho' u'\,dx = 0$$
$$du'' + \rho'' u''\,dx = 0.$$

Par le moyen des trois premieres équations, on aura d'abord $p = \frac{m''u' - m'u'' + n''m'y - n'm''y}{m'' - m'}$, $z = \frac{u'' - u' - n''y + n'y}{m'' - m'}$, & par conſéquent on aura $y = \frac{(m'' - m')u - m''u' + m'u''}{nm'' - nm' - n'm - n''m + n''m' - n'm''}$. Donc $y = Pu + P'u' + P''u''$. Mais des trois ſecondes équations on tire . . . . $lu = -\rho x + b$
$$lu' = -\rho' x + b'$$
$$lu'' = -\rho'' x + b'',$$

& par conſéquent . . . . $u = c^{-\rho x + b}$
$$u' = c^{-\rho' x + b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x + b''},$$

ou bien encore . . . . . $u = c^{-\rho x} \times c^{b}$
$$u' = c^{-\rho' x} \times c^{b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x} \times c^{b''}.$$

Donc enfin . . . . $y = Ac^{fx} + Bc^{gx} + Dc^{hx}$.

CCLIX.

En ſuivant la méthode de M. d'Alembert, ſi on trouve les valeurs de f égales, alors on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Ainſi on fera $y = Ac^{fx + \alpha x} + Bc^{fx + \rho x}$, α & ρ étant des quantités infiniment petites. Donc on aura $y = Ac^{fx} + A\alpha x c^{fx} + Bc^{fx} + B\rho x c^{fx}$; d'où l'on tire $y =$

Examen des cas différens d'après la méthode du Chapitre VI.

$(A+B)c^{fx}+(A\alpha+B\beta)xc^{fx}$. Donc enfin $y=(l+mx)c^{fx}$; ſuppoſition que nous fait faire de même la méthode de M. Euler. Nous aurions pu pouſſer l'expreſſion de $c^{fx+\alpha x}$ & de $c^{fx+\beta x}$ au-delà de deux termes; mais nous nous ſommes contentés de deux, parce qu'il n'y a dans l'équation $y=Ac^{fx+\alpha x}+Bc^{fx+\beta x}$ que deux coefficiens A & B & deux quantités infiniment petites α & β abſolument arbitraires.

CCLX.

Si f a trois valeurs égales, alors on ſuppoſera $y=Ac^{fx+\alpha x}+Bc^{fx+\beta x}+Dc^{fx+\sigma x}$. Comme il y a dans ce cas trois coefficiens & trois quantités infiniment petites indéterminées, on pouſſera juſqu'à trois termes la valeur approchée de $c^{fx+\alpha x}$ & des autres. On aura donc $y=Ac^{fx}+A\alpha xc^{fx}+\frac{A\alpha\alpha xxc^{fx}}{2}+Bc^{fx}+B\beta xc^{fx}+\frac{B\beta\beta xxc^{fx}}{2}+Dc^{fx}+D\sigma xc^{fx}+\frac{D\sigma\sigma xxc^{fx}}{2}$. Donc $y=(A+B+D)c^{fx}+(A\alpha+B\beta+D\sigma)xc^{fx}+\left\{\frac{A\alpha\alpha+B\beta\beta+D\sigma\sigma}{2}\right\}x^2c^{fx}$. Donc enfin $y=(l+mx+nxx)c^{fx}$.

CCLXI.

Quand une des valeurs de f eſt $=0$, c'eſt alors une marque qu'il y a dans l'expoſition de y un terme tout conſtant. Soit, par exemple, à intégrer l'équation $d^3y+ad^2ydx+bdydx^2=0$, ſi je fais $y=Ac^{fx}$, après la ſubſtitution

ſubſtitution j'aurai la transformée ſuivante $Ac^{fx}f^3dx^3 + Aac^{fx}f^2dx^3 + Abc^{fx}fdx^3 = 0$; donc $f^3 + aff + bf = 0$; donc nous aurons $f = 0$ & $ff + af + b = 0$. Cette ſeconde équation nous donne $y = Bc^{gx} + Dc^{hx}$. La premiere donne $y = Ec^0 = E1 = E$. Donc la valeur complete de y eſt $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

Et en effet, ſoit . . . . . $dy = zdx$

$z = Ac^{fx}$,

on aura . . . . . $ddy = dzdx$

$d^3y = ddzdx$,

& par conſéquent la transformée ſuivante $ddzdx + adzdx^2 + bzdx^3 = 0$, qui donne $ff + af + b = 0$. Donc (Art. CCL.) $z = Ac^{gx} + Fc^{hx}$. Or $dy = zdx$, donne $y = \int zdx + E = \int(Ac^{gx}dx + Fc^{hx}dx) + E$. Donc $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

CCLXII.

Si f a pluſieurs valeurs égales à zéro, alors on remarquera que ces valeurs ſont de plus égales entre elles. Donc ſuivant ce que nous avons dit (Art. CLIX.) on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites c^{ax}, c^{bx}, c^{Bx} différentes l'une de l'autre, & on pouſſera l'expreſſion de ces quantités juſqu'à un nombre de termes égal à celui des racines $= 0$.

CCLXIII.

Soit propoſé d'intégrer l'équation $d^5y + ad^4ydx +$

Application à un exemple du cinquieme ordre.

$bd^3ydx^2 = 0$, dans laquelle dx eſt toujours conſtant. La transformée, en ſuppoſant $y = Ac^{fx}$, ſera $Ac^{fx}f^5dx^5 + Aac^{fx}f^4dx^5 + Abc^{fx}f^3dx^5 = 0$; & en réduiſant on a $f^5 + af^4 + bf^3 = 0$. Or de cette équation on tire 1°. $f^3 = 0$, qui nous apprend que f a trois valeurs égales & $= 0$; 2°. $ff + af + b = 0$. Donc en pratiquant ce qui eſt dit plus haut, on aura pour l'équation $ff + af + b = 0$, $y = Ac^{-\frac{ax}{2} + x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}} + Bc^{-\frac{ax}{2} - x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}}$; ou bien $y = Ac^{mx} + Bc^{nx}$. Pour l'équation $f^3 = 0$, on aura $y = Dc^{fx+\alpha x} + Ec^{fx+\epsilon x} + Fc^{fx+\varphi x} = Dc^{fx} + D\alpha xc^{fx} + \frac{D\alpha\alpha xxc^{fx}}{2} + Ec^{fx} + E\epsilon xc^{fx} + \frac{E\epsilon\epsilon xxc^{fx}}{2} + Fc^{fx} + F\varphi xc^{fx} + \frac{F\varphi\varphi xxc^{fx}}{2} = (D + E + F)c^{fx} + (D\alpha + E\epsilon + F\varphi)xc^{fx} + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\varphi\varphi)\frac{xxc^{fx}}{2}$. Mais $f = 0$, donne $c^{fx} = c^0 = 1$, donc on a $y = D + E + F + (D\alpha + E\epsilon + F\varphi)x + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\varphi\varphi)\frac{xx}{2} = l + px + qxx$. Donc la valeur complete de y ſera $Ac^{mx} + Bc^{nx} + l + px + qxx$.

CCLXIV.

C'eſt ce dont on peut ſe convaincre de la façon ſuivante. Je reprends l'équation propoſée $d^3y + ad^4ydx + bd^3ydx^2 = 0$. Faiſons

y . . . . $dy = zdx$

$dz = qdx$

$dq = rdx$

$r = A'c^{fx}$.

Nous aurons . . . . $ddy = dzdx = qdx^2$
$d^3y = dqdx^2 = rdx^3$
$d^4y = ddrdx^3$
$d^5y = ddrdx^3$.

Donc la transformée ſera $d^2rdx^3 + adrdx^4 + brdx^5 = 0$, ou $ddr + adrdx + brdx^2 = 0$; équation de laquelle on tire (Art. CCLVIII.) $r = A'c^{mx} + B'c^{nx}$. Mais $dq = rdx$ donne $q = \int rdx + E = \int (A'c^{mx}dx + B'c^{nx}dx) + E = \frac{A'c^{mx}}{m} + \frac{B'c^{nx}}{n} + E$. Donc $q = A''c^{mx} + B''c^{nx} + E$. De même $dz = qdx$ donne $z = \int qdx + C = \int (A''c^{mx}dx + B'c^{nx}dx + Edx) + C$. Donc $z = A'''c^{mx} + B'''c^{nx} + Ex + C$. Enfin $dy = zdx$ donne $y = \int zdx + L = \int (A'''c^{mx}dx + B'''c^{nx}dx + Exdx + Cdx) + L$. Donc $y = Ac^{mx} + Bc^{nx} + l + px + qxx$.

CCLXV.

Application de la méthode du Chap. VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée.

SCHOLIE I. Si l'on vouloit maintenant appliquer la méthode de M. Euler à l'équation $d^ny + ad^{n-1}ydx + \ldots + Xdx^n = 0$, dans laquelle ſe trouve, comme on le voit, le terme Xdx^n, alors on remarquera que dans le cas où l'équation différentielle eſt, par exemple, du troiſieme ordre, le Problême ſe réduit aux équations ſuivantes . . . . . $du + \rho udx + Xdx = 0$
$du' + \rho'u'dx + Xdx = 0$
$du'' + \rho''u''dx + Xdx = 0$,
& . . . . . $x + ny + mz = u$

$$x + n'y + m'z = u'$$
$$x + n''y + m''z = u''.$$

Multipliant par $c^{\int p dx}$ l'équation $du + pu dx + X dx = 0$; elle devient $du c^{\int p dx} + pu dx c^{\int p dx} + X dx c^{\int p dx} = 0$; dont l'intégrale eſt $u c^{\int p dx} + \int X c^{\int p dx} dx + P = 0$. Donc $u + c^{-\int p dx} \int X c^{\int p dx} dx + P c^{-\int p dx} = 0$. On aura de la même maniere $u' + c^{-\int p' dx} \int X c^{\int p' dx} dx + P' c^{-\int p' dx} = 0$, $u'' + c^{-\int p'' dx} \int X c^{\int p'' dx} dx + P' c^{-\int p'' dx} = 0$. Subſtituant ces valeurs de u, u', u' dans les trois ſecondes équations, on en tirera la valeur de y en x, laquelle ſera de la forme ſuivante $y = A c^{\int f dx} + B c^{\int g dx} + D c^{\int h dx} + \&c. + E c^{\int f dx} \int c^{-\int f dx} X dx + F c^{\int g dx} \int X c^{-\int g dx} dx + G c^{\int h dx} \int X c^{-\int h dx} dx + \&c.$

CCLXVI.

Application de la formule à une équation différentielle du ſecond ordre.

Ainſi ſuppoſons qu'on ait à intégrer l'équation différentielle du ſecond ordre $ddy + a dy dx + b y dx^2 + X dx^2 = 0$, on fera $y = A c^{\int f dx} B c^{\int g dx} + E c^{\int f dx} \int X c^{-\int f dx} dx + F c^{\int g dx} \int X c^{-\int g dx} dx$. Maintenant pour déterminer f, g, A, B, E, F, je ſubſtitue dans l'équation à la place de y, dy, ddy, leurs valeurs : cette opération me donne la transformée ſuivante,

$$\begin{aligned}
&A c^{\int f dx} f^2 dx^2 + B c^{\int g dx} g^2 dx^2 + E d X dx + E f X dx^2 + \\
&+ A a c^{\int f dx} f dx^2 + a B c^{\int g dx} g dx^2 + F d X dx + F g X dx^2 \\
&+ A b c^{\int f dx} dx^2 + b B c^{\int g dx} dx^2 \qquad\qquad + a E X dx^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a F X dx^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + X dx^2 \\
&+ E f^2 dx^2 c^{\int f dx} \int c^{-\int f dx} X dx + F g^2 dx^2 c^{\int g dx} \int c^{-\int g dx} X dx \\
&+ a E f dx^2 c^{\int f dx} \int c^{-\int f dx} X dx + a F g dx^2 c^{\int g dx} \int c^{-\int g dx} X dx \\
&+ b E d x^2 c^{\int f dx} \int c^{-\int f dx} X dx + b F d x^2 c^{\int g dx} \int c^{-\int g dx} X dx = 0,
\end{aligned}$$

Or de cette équation on tire les ſix équations ſuivantes, en égalant à zéro les coefficiens de tous les termes analogues,

$$\begin{aligned} Aff + Aaf + Ab &= 0 \\ Bgg + Bag + Bb &= 0 \\ Eff + Eaf + Eb &= 0 \\ Fgg + Fag + Fb &= 0 \\ Ef + Fg + Ea + Fa + 1 &= 0 \\ E + F &= 0 \end{aligned}$$

Donc on aura les valeurs de A, B, E, F, f, g. Donc on aura la valeur complete de y. Au reſte on remarquera que A & B pourront être tout ce qu'on voudra.

S'il y a des racines égales, par exemple, ſi $f = g$, alors au lieu des termes $Ec^{fx}\int c^{-fx}Xdx + Fc^{gx}\int c^{-gx}Xdx$, on aura $pc^{fx}\int c^{-fx}Xdx + qxc^{fx}\int c^{-fx}Xdx - qc^{fx}\int xc^{-fx}Xdx$.

Car dans ce cas il faut faire (Art. CCLIX.) $y = Ac^{fx+\alpha x} + Bc^{fx+\varphi x} +$ &c. $+ Ec^{fx+\alpha x}\int c^{-fx-\alpha x}Xdx + Fc^{fx+\varphi x}\int c^{-fx-\varphi x}Xdx +$ &c. α & φ étant des quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Or $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx}$, $c^{fx+\varphi x} = c^{fx} + \varphi x c^{fx}$: donc en ſuppoſant $A + B = l$, $A\alpha + B\varphi = m$, on aura $y = (l + mx)c^{fx} + Ec^{fx}\int c^{-fx}Xdx - Ec^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx + E\alpha x c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - E\alpha x c^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx + Fc^{fx}\int c^{-fx}Xdx - Fc^{fx}\int \varphi x c^{-fx}Xdx + F\varphi x c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - F\varphi x c^{fx}\int \varphi x c^{-fx}Xdx =$ (en ſuppoſant $E + F = p$, & $E\alpha + F\varphi = q$) $(l + mx)c^{fx} + (p + qx)c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - (E + E\alpha x).c^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx - (F +$

$F\varphi x)\, c^{fx} \int \varphi x c^{-fx} X dx = (l + mx)\, c^{fx} + (p + qx)\, c^{fx} \int c^{-fx} X dx - (E\alpha + E\alpha\alpha x)\, c^{fx} \int x c^{-fx} X dx - (F\varphi + F\varphi\varphi x).\, c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$. Mais comme α & φ ſont des quantités infiniment petites, les termes où ſe trouvent leurs quarrés ſont nuls par rapport aux autres : donc on aura $y = (l + mx)\, c^{fx} + p c^{fx} \int c^{-fx} X dx + q x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - q c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$.

Si pluſieurs racines étoient égales à zéro, par exemple, ſi on avoit $f = 0$, $g = 0$, alors cette ſuppoſition nous donneroit $c^{fx} = 1$; donc on auroit $y = l + mx +$ &c. $+ p \int X dx + q x \int X dx - q \int x X dx +$ &c.

Il eſt aiſé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit ſuivre, s'il y avoit dans l'équation propoſée plus de deux racines égales, ou égales à zéro.

CCLXVII.

Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II.

SCHOLIE 2. En ſuivant les mêmes principes, on appliquera facilement la méthode de M. Euler aux équations différentielles du premier degré que nous avons réſolues dans le Chapitre XV. par la méthode des coefficiens indéterminés : nous trouverons la forme que doivent avoir les valeurs indéterminées x, y, z &c. Nous allons le faire voir par un exemple.

CCLXVIII.

Soient propoſées les deux équations

$$dx + a dy + (cx + ey)\, T dt + \theta dt = 0$$

$$dy + b\,dx + (fx + gy)\,T\,dt + F\,dt = 0,$$

dans lesquelles θ, T & F sont des fonctions quelconques de t. Je multiplie la seconde de ces deux équations par un coefficient indéterminé μ, & j'aurai

$$dx + a\,dy + (cx + ey)\,T\,dt + \theta\,dt = 0$$
$$\mu\,dy + b\mu\,dy + (fx + gy)\,\mu T\,dt + \mu F\,dt = 0:$$

je les ajoute ensemble, j'ai $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \{(c + \mu f)\,x + (e + g\mu)\,y\}\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$. Soit $(c + f\mu)\,x + (e + g\mu)\,y = (1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry$, on aura en comparant terme à terme

$$c + f\mu = R + b\mu R$$
$$e + g\mu = aR + \mu R,$$

donc l'équation devient $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \{(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry\}\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$.

Soit . . . . $(1 + b\mu)\,x + (a + \mu)\,y = u$,

on aura . . . $(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry = Ru$

$$(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy = du:$$

donc en substituant ces valeurs dans la derniere équation, j'aurai $du + Ru\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$, équation intégrable par la méthode de M. Bernoulli, exposée dans le Chapitre VII. Section I. . . . . .

Rappellons-nous le procédé que cette méthode nous donne pour trouver la valeur de u en t, nous multiplierons l'équation par t', en supposant que t' soit une fonction de t, telle que les deux premiers termes deviennent une différentielle exacte. On aura donc $t'\,du + Ru\,t'\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,t'\,dt = 0$. Mais par l'hypothese

précédente on a $dt' = Rt'Tdt$; donc $\frac{dt'}{t'} = RTdt$; donc $lt' = \int RTdt$; donc $t' = c^{R\int Tdt}$. Donc $c^{R\int Tdt}du + uc^{R\int Tdt}RTdt + (0 + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = 0$, équation dont l'intégrale eſt $uc^{R\int Tdt} + \int(0 + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = Q$. Donc enfin $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(0 + \mu F)c^{R\int Tdt}dt$.

Maintenant on a . . . $\frac{e + f\mu}{1 + b\mu} = R$,

& . . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = R$:

donc . . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = \frac{c + f\mu}{1 + b\mu}$: donc $e + g\mu + be\mu + bg\mu\mu = ac + af\mu + c\mu + f\mu\mu$, équation qui nous apprend que μ a deux valeurs. Soient m & m' ces deux valeurs de μ, au lieu de l'équation $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(0 + \mu F)c^{R\int Tdt}dt$, on aura les deux ſuivantes,

$$u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(0 + mF)c^{R\int Tdt}dt,$$
$$u' = Q'c^{-R'\int Tdt} - c^{-R'\int Tdt}\int(0 + m'F)c^{R'\int Tdt}dt;$$

& au lieu de l'équation $(1 + b\mu)x + (a + \mu)y = u$, en ſuppoſant . . . . $1 + bm = i$, $a + m = n$

$1 + bm' = l$, $a + m' = h$,

on aura . . . . . $ix + ny = u$

$lx + hy = u'$.

De ces deux équations on tire après un calcul fort ſimple . . . . . $y = \frac{iu' - lu}{ih - ln}$,

$x = \frac{hu - nu'}{ih - ln}$.

Donc en ſubſtituant pour u, & u' leurs valeurs, on aura $x = Ac^{-R\int Tdt} + Bc^{-R'\int Tdt} + Ec^{-R\int Tdt}\int(0 + mF)c^{R\int Tdt}$

$c^{R\int T dt} dt + Fc^{-R\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{R\int T dt} dt$. Donc en ſuppoſant . . . . . $-R = f$

$-R' = g$

on a $x = Ac^{f\int T dt} + Bc^{g\int T dt} + Ec^{f\int T dt} \int (\theta + mF) c^{-f\int T dt} dt + Fc^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$. On trouvera de même $y = A'c^{f\int T dt} + B'c^{g\int T dt} + E'c^{f\int T dt} \int (\theta + mF) e^{-f\int T dt} dt + Fc^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$.

CCLXVIII.

Si l'on avoit à intégrer les trois équations ſuivantes,

$$dx + (ax + by + cz) dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz) dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz) dt = 0$$

on trouveroit en ſuivant les mêmes procédés

$$x = Ac^{ft} + Bc^{gt} + Dc^{ht}$$
$$y = A'c^{ft} + B'c^{gt} + D'c^{ht}$$
$$z = A''c^{ft} + B''c^{gt} + D''c^{ht}:$$

CCLXIX.

Corollaire general. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre, que la forme qu'il faut donner aux indéterminées x, y, z, &c. dépend de deux choſes, 1°. De la forme de la valeur des u dans l'équation finale. 2°. Du nombre d'équations du premier degré auxquelles le Problême ſe réduira; ou ce qui revient au même, des valeurs de u, u', u'', &c. qui toutes ſont, comme on l'a vu, repréſentées par des équations ſemblables & de différents coefficients.

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du ſecond ordre, repréſentées par la formule $(M)\,(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n)\,xdxdv+(g+hx^n)\,vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant.*

CCLXX.

DAns les Chapitres IX, X & XI de la premiere Section, nous avons développé comment on trouvoit les cas d'intégrabilité de l'équation de Ricati & de quelques autres du premier ordre à trois ou quatre termes, qu'on ne peut intégrer généralement par les méthodes connues des Géometres juſqu'à préſent. C'eſt un travail avantageux aux progrès de l'analyſe, que de chercher ainſi des intégrales particulieres, lorſque l'art ne nous en donne point de générales. M. Euler l'a pratiqué pour les équations du ſecond ordre repréſentées par la formule $(M)\,(a+bx^n)\,x^2\,ddv+(c+fx^n)\,xdxdv+(g+hx^n)\,vdx^2=0$, dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant.

Quel eſt l'auteur de cette méthode.

Mais avant d'expoſer la méthode dont il ſe ſert, nous allons placer ici la ſolution d'un Problême dont nous aurons lieu de faire l'application dans ce Chapitre.

Solution d'un Problême néceſſaire pour la ſuite.

CCLXXI.

Probleme. Etant donnée l'intégrale particuliere d'une différentielle d'un ordre plus élevé que le premier, trouver par ſon moyen l'intégrale générale & complete de cette équation.

Solution. Soit l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$, dans laquelle P, Q & R ſont des fonctions de x, qu'on a intégrée pour un cas particulier en faiſant $v = X$, c'eſt-à-dire, une fonction de x. Pour trouver l'intégrale complete, je fais $v = Xz$,

ce qui me donne . . $dv = Xdz + zdX$

$$ddv = zddX + 2dXdz + Xddz.$$

Je ſubſtitue ces valeurs dans la propoſée ; cette ſubſtitution donne la transformée ſuivante,

$$PzddX + 2PdXdz + PXddz = 0$$
$$+ QzdXdx + QXdxdz$$
$$+ RzXdx^2$$

mais X eſt la valeur qu'il faut ſubſtituer à v dans l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$; on aura donc $PzddX + QzdXdx + RzXdx^2 = 0$; donc en effaçant ces termes dans la transformée, il nous reſte $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = 0$, ou bien $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = 0$. Or P & Q étant des fonctions de x, l'intégrale de cette équation eſt $2lX + \int\frac{Qdx}{P} + l\frac{dz}{dx} = A$; & en ſuppoſant $\int\frac{Qdx}{P} = s$, c le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on aura $2lX + slc + l\frac{dz}{dx} = A$; ou bien $X^2 c^s dz$

$= A\,dx$, ou $X^2\,dz = A\,c^{-s}\,dx$. Donc $z = A\int \frac{c^{-s}\,dx}{X^2}$; donc Xz ou $v = AX\int \frac{c^{-\int \frac{Q\,dx}{P}}\,dx}{X^2}$; équation qui eſt l'intégrale complette de $P\,dd\,v + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = 0$, en ſuppoſant que $v = X$ nous en donne une intégrale particuliere. Je paſſe maintenant à la méthode de M. Euler.

CCLXXII.

En quoi conſiſte la méthode.

Cette méthode conſiſte à transformer l'équation (M) en une ſerie telle que dans pluſieurs cas elle ſoit finie, & que nous ayons par conſéquent pour ces cas l'intégrale de la propoſée. Nous ramenerons enſuite cette équation du ſecond degré à une du premier, à laquelle nous donnerons différentes formes pour en déduire un grand nombre d'équations différentielles du premier ordre qui ſeront intégrables dans les mêmes cas que la formule (M).

On y peut faire uſage de deux ſeries différentes.

La formule (M) $(a + bx^n).x^2\,dd\,v + (c + fx^n).x\,dx\,dv + (g + hx^n).v\,dx^2 = 0$ peut ſe transformer en ſerie de deux façons différentes.

1°. En ſuppoſant $v = Ax^m + Bx^{m+n} Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} +$ &c.

2°. En ſuppoſant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Examinons ſéparément les deux ſeries que nous donnent ces deux transformées, & les conditions ſuivant leſquelles ces ſeries ſeront terminées.

CCLXXIII.

1°. En faiſant dans $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n)$ $xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, $v=Ax^m+Bx^{m+n}$ $+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+$ &c. on aura $dv=mAx^{m-1}dx+(m+n)Bx^{m+n-1}dx+(m+2n)Cx^{m+2n-1}dx+(m+3n).Dx^{m+3n-1}dx+(m+4n).Ex^{m+4n-1}dx+$ &c.; & comme dx eſt conſtant, on aura $ddv=m.(m-1)Ax^{m-2}dx^2+(m+n).(m+n-1)Bx^{m+n-2}dx^2+(m+2n).(m+2n-1).Cx^{m+2n-2}dx^2+(m+3n).(m+3n-1).Dx^{m+3n-2}dx^2+(m+4n).(m+4n-1).Ex^{m+4n-2}dx^2+$ &c. Subſtituant dans l'équation $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n).xdxdv+(g+hx^n)xdx^2=0$, pour v, dv, ddv, ces valeurs, on aura la transformée ſuivante (N) $\{cm+g+am.(m-1)\}Ax^m dx^2+\{(cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a)B+(fm+h+bm.(m-1))A\}x^{m+n}dx^2+\{(fm+fn+h+(m+n).(m+n-1)b)B+(cm+2cn+g+(m+2n).(m+2n-1)a)C\}x^{m+2n}dx^2+\{(fm+2fn+h+(m+2n).(m+2n-1)b)C+(cm+3cn+g+(m+3n).(m+3n-1)a)D\}x^{m+3n}dx^2+\{(fm+3fn+h+(m+3n).(m+3n-1)b)D+(cm+4cn+g+(m+4n).(m+4n-1)a)E\}x^{m+4n}dx^2+\{(fm+4fn+h+(m+4n).(m+4n-1)b)E\}x^{m+5n}dx^2+$ &c. $=0$.

Premiere Serie.

J'égale maintenant à zéro les termes homogenes, j'aurai

la valeur déterminée des coefficiens A, B, C, D, E, & de l'expoſant m. D'abord on a $g+cm+am\cdot(m-1)=0$; & afin de ne pas tomber dans des quantités affectées de ſignes radicaux, je regarde m comme un nombre connu, & je m'en ſers pour déterminer g. J'aurai donc $g=-cm-am.(m-1)$.

Le ſecond terme nous donne $\{cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a\}B+(fm+h+bm.(m-1))A=0$. Je ſubſtitue dans cette équation au lieu de g ſa valeur, j'aurai $\{cm+cn-cm-am.(m-1)+(m+n).(m+n-1)a\}B+\{fm+h+bm.(m-1)\}A=0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, on a

$$B=\frac{-A.[h+fm+bm.(m-1)]}{cn+an.(2m+n-1)}.$$

Faiſant les mêmes opérations ſur les termes ſuivants, on trouve

$$C=\frac{-B.[h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1)]}{2cn+2an.(2m+2n-1)}$$

$$D=\frac{-C.[h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+2n-1)]}{3cn+3an.(2m+3n-1)}$$

$$E=\frac{-D.[h+f(m+3n)+b.(m+3n).(m+3n-1)]}{4cn+4an.(2m+4n-1)}$$

&c.

On voit par là que A ſera une quantité conſtante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients ſuivants. Il eſt encore évident que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, ſi un ſeul d'entre eux eſt égal à zéro, tous les ſuivants s'évanouiront, en ſorte que dans ces cas la valeur de v ſera finie, & par conſéquent l'équation (M) intégrable.

Suppoſons, par exemple, que $h+fm+bm.(m-1)$

$= 0$, alors $B = 0$, donne $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & par conſéquent $v = Ax^m$ & la transformée ſera $\{m.(m-1).(a+bx^n)+m.(c+fx^n)+(g+hx^n)\} Ax^m dx^s = 0$, dont on connoît l'intégrale.

Si $h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1) = 0$, alors on aura $C = 0$, & par conſéquent $D = 0$, $E = 0$; on aura donc $v = Ax^m + Bx^{m+n}$.

Si $h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+n-1) = 0$, alors $D = 0$ donne auſſi $E = 0$, & $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n}$. Donc en général en ſuppoſant i un nombre entier poſitif ou zéro, l'équation propoſée (M) ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $h+f(m+in)+b(m+in).(m+in-1) = 0$, ou $h = -f(m+in) - b(m+in).(m+in-1)$.

Equations de condition ſuivant leſquelles la premiere Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

CCLXXIV.

Il y a cependant des cas dans leſquels cette méthode ne nous donneroit point l'intégrale que nous demandons; ce ſont ceux dans leſquels le dénominateur de nos coefficients s'évanouiroit; par exemple, ſi on avoit $c = -a.(2m+in+n-1)$.

CCLXXV.

2°. Je ſuppoſe maintenant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Je fais les mêmes calculs que nous venons de faire plus haut: ils me donnent les valeurs de v, dv, ddv; je ſubſtitue ces valeurs

Seconde Serie.

dans l'équation (M), j'aurai la transformée ſuivante (P)

$$\{h+fk+bk.(k-1)\}Ax^{k+n}dx^2+\{(g+ck+ak.(k-1))A+(h+f(k-n)+b(k-n).(k-n-1))B\}x^k dx^2+\{(g+(k-n)c+(k-n).(k-n-1)a)B+(h+(k-2n)f+(k-2n).(k-2n-1)b)C\}x^{k-n}dx^2+\{(g+(k-2n)c+(k-2n).(k-2n-1)a)C+(h+(k-3n)f+(k-3n).(k-3n-1)b)D\}x^{k-2n}dx^2+\{(g+(k-3n)c+(k-3n).(k-3n-1)a)D+(h+(k-4n)f+(k-4n).(k-4n-1)b)E\}x^{k-3n}dx^2+\{g+(k-4n)c+(k-4n).(k-4n-1)a)\}Ex^{k-4n}dx^2+\text{&c.}$$

Maintenant je fais ſur cette transformée les mêmes opérations que j'ai faites ſur la transformée (N); j'égale à zéro les termes homogenes : j'aurai par ce moyen les valeurs des coefficients A, B, C, D, E, & auſſi celle de l'expoſant k. Je trouve d'abord

$$h+fk+bk(k-1)=0$$

& en ſuppoſant k connu & déterminé, on a

$$h=-fk-bk.(k-1).$$

Subſtituant dans les différentes équations des termes homogenes pour h cette valeur, je trouve

$$B=\frac{A.(g+ck+ak.(k-1))}{fn+bn.(2k-n-1)}$$

$$C=\frac{B.(g+c(k-n)+a(k-n).(k-n-1))}{2fn+2bn.(2k-2n-1)}$$

$$D=\frac{C.(g+c(k-2n)+a(k-2n).(k-2n-1))}{3fn+3bn.(2k-3n-1)}$$

$$E=\frac{D.(g+c(k-3n)+a(k-3n).(k-3n-1))}{4fn+4bn(2k-4n-1)}$$

&c.

A ſera ici comme dans la ſerie (N) une quantité conſtante arbitraire, de laquelle dépendra la détermination de tous les autres coefficients; & en général ſi on ſuppoſe dans cette ſerie (P)

$$g = -c(k-in) - a(k-in).(k-in-1),$$

i étant un nombre entier poſitif ou zéro, la ſerie s'arrêtera, & l'on aura l'intégrale de l'équation (M).

Cas dans leſquels cette ſeconde Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

Par exemple, ſi $i = 0$, on a B, C, D, E égaux à zéro, & par conſéquent $v = Ax^k$: ſi $i = 1$, on aura $v = Ax^k + Bx^{k-n}$, & $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & ainſi de ſuite.

CCLXXVI.

Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il s'enſuit que l'équation $(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)xdxdv + (g+hx^n)vdx^2 = 0$, dans laquelle

$$g = -cm - am.(m-1)$$

& . . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$

ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $f(-m-in) = h + b(m+in).(m+in-1)$, ou $c.(-k+in) = g + a(k-in).(k-in-1)$; ou bien en mettant pour h & g leurs valeurs, on trouvera l'équation intégrable, lorſque $f = \frac{[(m+in).(m+in-1) - k.(k-1)]b}{k-m-in} =$ (en faiſant la diviſion) $[1-k-m-in]b$; ou lorſque $c = \frac{[(k-in).(k-in-1) - m.(m-1)]a}{m-k+in} = (1-k-m+in)a$.

On a donc deux façons différentes de trouver une infinité de cas dans leſquels la propoſée eſt intégrable; &

dans chacun de ces cas on trouvera algébriquement la valeur de v en x, en cherchant celle des coefficients B, C, D, E dont le nombre alors eſt limité.

CCLXXVII.

SCHOLIE. Il faut bien remarquer que les intégrales trouvées par la méthode précédente ne ſont que des cas particuliers des intégrales completes, que nous a donnés la ſuppoſition de quelque conſtante $= 0$, ou $= \infty$. Mais en ſuivant la méthode indiquée dans le Problême qui eſt à la tête de ce Chapitre, on trouvera les intégrales completes de tous ces cas différents.

CCLXXVIII.

Réduction de la formule (M) en une équation différentielle du premier ordre.

Nous allons maintenant examiner les équations différentielles du premier degré qui réſultent de notre formule (M), équations qu'on intégrera dans les mêmes cas dans leſquels on integre cette formule.

Soit ſuivant la méthode expoſée dans le Chapitre VI. Sect. II. $v = c^{\int z\,dx}$, & par conſéquent $z = \frac{dv}{v\,dx}$; on voit bien que connoiſſant la valeur de v, on aura ſur le champ celle de z en x. L'hypotheſe précédente nous donne $dv = c^{\int z\,dx} z\,dx$; & comme dx eſt ſuppoſé conſtant, on a $ddv = c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2\,dx^2)$. Subſtituant ces valeurs dans (M), on a pour transformée $(a + bx^n).x^2 c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2\,dx^2) + (c + fx^m).c^{\int z\,dx} z\,x\,dx^2 + (g + hx^n).c^{\int z\,dx} dx^2 = 0$; laquelle

devient après les réductions ordinaires (V) $(a+bx^n).x^2dz+(c+fx^n)zxdx+(a+bx^n).z^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$, équation différentielle du premier degré.

Cas dans lesquels la réduite (V) est intégrable.

Donc (Art. CCLXXIII.) en y supposant

$$g=-cm-am.(m-1),$$

& . . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

elle sera intégrable, toutes les fois qu'on aura ou bien $f=\left\{\frac{(m+in).(m+in-1)-k.(k-1)}{k-m-in}\right\}b=(1-k-m-in)b$; ou bien $c=\left\{\frac{(k-in).(k-in-1)-m.(m-1)}{m-k+in}\right\}a=(1-k-m+in)a$; & de plus après avoir trouvé pour ces cas la valeur de v, on aura celle de z au moyen de l'équation $z=\frac{dv}{vdx}$.

CCLXXIX.

Transformations de l'équation (V) en d'autres de trois termes.

SCHOLIE. Mais afin que l'on voie mieux les équations particulieres renfermées dans cette équation générale (V), transformons-la dans une autre qui n'ait que trois termes de la forme suivante $Pdz+Qz^2dx+Rdx=0$, P, Q & R étant des fonctions de x. Or nous pouvons faire cette transformation de plusieurs manieres différentes que nous allons examiner ici séparément.

CCLXXX.

Premiere transformation.

PREMIERE TRANSFORMATION. Soit dans l'équation (V) $z=Ty$, T étant une fonction inconnue de x, on aura

$dz = y\,dT + T\,dy$; & la transformée ſera $(a+bx^n)\cdot y x^2 dT + (a+bx^n)\cdot x^2 T dy + (c+fx^n)\cdot T y x\,dx + (a+bx^n)\,y^2 T^2 x^2 dx + (g+hx^n)\,dx = 0$. Soit maintenant $(c+fx^n)\,T y x\,dx + (a+bx^n)\cdot y x^2 dT = 0$, ou en effaçant yx qui eſt commun aux deux termes $(c+fx^n)\cdot T dx + (a+bx^n)\cdot x\,dT = 0$, on a $\frac{(c+fx^n)\,dx}{(a+bx^n)\,x} + \frac{dT}{T} = 0$, équation de laquelle il faut tirer la valeur de T.

Pour cela je donne au premier membre la forme ſuivante $\frac{acx^{-1}dx + afx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$; j'y ajoute & j'en retranche en même temps $\frac{bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, j'aurai $\frac{acx^{-1}dx + bcx^{n-1}dx + afx^{n-1}dx - bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, ou bien $\frac{c\,dx}{ax} + \frac{(af-bc)\,x^{n-1}dx}{a\cdot(a+bx^n)}$. L'équation entiere ſera donc $\frac{C dx}{ax} + \frac{(af-bc)\,x^{n-1}dx}{a\cdot(a+bx^n)} + \frac{dT}{T} = 0$. Son intégrale eſt, comme on le ſait, $\frac{c}{a}\,lx + \frac{(af-bc)}{abn}\cdot l(a+bx^n) + lT = 0$, en ſuppoſant la conſtante $= 0$; donc $lT = \frac{(bc-af)}{abn}\,l(a+bx^n) - \frac{c}{a}\,lx$; d'où l'on tire en repaſſant des logarithmes aux nombres $T = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$.

Par conſéquent la ſuppoſition qu'on doit faire pour $z = Ty$, eſt celle-ci $z = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}\,y}{x^{\frac{c}{a}}}$. Cette

ſuppoſition nous donne $dz = \frac{(bc-af)}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}-1} yx^{n-\frac{c}{a}-1} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} x^{-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{-\frac{c}{a}-1} dx$. Donc en ſubſtituant pour z & dz ces valeurs dans l'équation (V), on aura celle-ci $\frac{(bc-af)}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{n+1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (c+fx^n) . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{2bc-2af}{abn}+1} y^2 x^{2-\frac{2c}{a}} dx + (g+hx^n) dx = 0$. Pour réduire cette équation, je la diviſe par la quantité $(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}}$ qui multiplie dy, j'ai $dy - \frac{cydx}{ax} - \frac{(af-bc) yx^{n-1} dx}{a . (a+bx^n)} + \frac{(c+fx^n) ydx}{(a+bx^n) . x} + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+hx) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$.

Maintenant comme $\frac{cydx}{ax} + \frac{(af-bc) yx^{n-1} dx}{a . (a+bx^n)}$ & $\frac{(c+fx^n) ydx}{(a+bx^n) . x}$ ſont deux expreſſions différentes de la même grandeur, & que dans l'équation précédente elles ſont de ſignes contraires, elles s'y détruiſent. Conſéquemment il ne nous reſte plus que (A) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$;

Equation transformée (A) qui n'a plus que trois termes.

équation intégrable, ſi $g = -cm - am.(m-1)$
& . . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$.
toutes les fois qu'on aura ou bien $f = (1-k-m-in)b$,
ou bien . . . . . $c = (1-k-m+in)a$,
i repréſentant un nombre entier quelconque.

Examinons ſéparément les cas particuliers de cette équation.

CCLXXXI.

Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation.

Suppoſons 1° que $bc = af$, l'équation (A) devient

$$(B)\quad dy + y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g + hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{a + bx^n} = 0.$$

Soit $x^{\frac{a-c}{c}} = t$, on aura $x = t^{\frac{a}{a-c}}$; $dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt$; $x^{-\frac{c}{a}} = t^{\frac{-c}{a-c}}$; $x^{\frac{c}{a}-2} = t^{\frac{c-2a}{a-c}}$. Faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation précédente, on a celle-ci $dy + \frac{a}{a-c} y^2 t^{\frac{a-c}{a-c}-1} dt + \frac{a.(g + ht^{\frac{an}{a-c}}) t^{\frac{c-2a+a}{a-c}-1} dt}{(a-c).(a + bt^{\frac{an}{a-c}})} = 0$; c'eſt-à-dire qu'en réduiſant on aura (Y) $dy + \frac{ay^2 dt}{a-c} + \frac{a.(g + ht^{\frac{an}{a-c}}) dt}{(a-c).(a + bt^{\frac{an}{a-c}}) tt} = 0$. Donc (Corollaire, Article CCLXXVI.) cette équation (Y) ſera intégrable, ſi

Premiere équation particuliere.

Dans quels cas elle eſt intégrable.

$$g = -cm - am(m-1)$$
& . . . . . $h = -fk - bk(k-1)$;

toutes les fois que . . . $f = (1 - k - m - in)\, b$,
ou que . . . . . $c = (1 - k - m + in)\, a$.
Donc à cauſe de l'hypotheſe préſente de $bc = af$, qui donne $f = \frac{bc}{a}$, l'équation (Y) ſera intégrable, ſi

$$g = -cm - am \cdot (m - 1)$$

& . . . . . $h = -\frac{b}{a}\{ck + ak \cdot (k - 1)$,
toutes les fois qu'on aura $c = (1 - k - m - in)$,
ou . . . . . $c = (1 - k - m + in)$;
c'eſt-à-dire, toutes les fois qu'on aura $\frac{c + ak + (m-1)a}{an} = \pm i =$ par conſéquent un nombre entier poſitif ou négatif.

CCLXXXII.

Si de plus $c = 0$, l'équation (Y) devient $dy + y^2 dt \pm \frac{(g + ht^n)\, dt}{(a + bt^n)\, tt} = 0$, & en mettant pour g & h leurs valeurs trouvées plus haut, on a (Z) $dy + y^2 dt = \frac{(am \cdot (m-1) + bk \cdot (k-1)\, t^n)\, dt}{(a + bt^n)\, tt}$; équation intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{k + m - 1}{n} = \pm i$. Donc ſi on ſuppoſe alternativement k, ou $m = 0$, dans le premier cas l'équation $dy + y^2 dt = \frac{am \cdot (m-1)\, dt}{(a + bt^n)\, tt}$ ſera intégrable, toutes les fois que $\frac{m-1}{n}$ ſera égal à un nombre entier poſitif ou négatif; & ſi on ſuppoſe $m = 0$, l'équation $dy + y^2 dt = \frac{bk \cdot (k-1)\, t^n dt}{(a + bt^n)\, tt}$ ſera intégrable, lorſque $\frac{k-1}{n}$ ſera égal à un nombre entier poſitif ou négatif.

Seconde équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIII.

Mais si l'on a $c = a$, alors l'équation (B) devient $dy + \frac{y^2 dx}{x} = -\frac{(g + hx^n)dx}{(a + bx^n)x}$; & en mettant pour g & pour h leurs valeurs, on a (X) $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(amm + bkkx^n)dx}{(a + bx^n)x}$; équation intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m}{n}$ égal à un nombre entier positif ou négatif. Donc en supposant dans cette derniere équation $k = 0$, on aura la suivante $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{ammdx}{(a + bx^n)x}$; intégrable si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif; & en y supposant $m = 0$, on aura cette autre équation $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{bkkx^n dx}{a + bx^n}$; intégrable toutes les fois que $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier positif ou négatif.

Troisieme équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIV.

Reprenons maintenant l'équation (A) $dy + \frac{(a + bx^n)^{\frac{be-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g + hx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a + bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$; & supposons que dans cette équation $c = -a(n-1)$ on aura . . . . . $x^{\frac{c}{a}} = x^{-n+1}$

$$x^{\frac{c}{a}-2} = x^{-n-1}$$

$$\frac{bc-af}{abn} = \frac{b-f}{bn} - 1$$

$$\frac{bc-af}{abn} + 1 = \frac{b-f}{bn}.$$

Donc

Donc l'équation (A) devient (D) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} y^2 x^{n-1} dx}{a+bx^n} + \frac{(g+hx^n)dx}{x^{n+1}.(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}}} = 0.$

Soit dans cette équation (D) $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t$,

on aura . . . $a+bx^n = t^{\frac{bn}{b-f}}$

$$x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$$

$$x = \frac{(t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$dx = \frac{\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{b-f}.$$

Donc en faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation (D), on aura la transformée ſuivante,

$$dy + \frac{y^2 . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right) . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} . t\,dt}{(b-f)\, t^{\frac{bn}{b-f}} . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$+ \frac{\left\{g + h\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)\right\} . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{(b-f) . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}+1} . t}$$

$= 0$; c'eſt-à-dire, qu'en réduiſant on a (E) $dy + \frac{y^2 dt}{b-f}$

Quatrieme équation particuliere.

$$+\frac{b\,.\,(bg-ah+hx^{\frac{bn}{b-f}})\,t^{\frac{bn}{b-f}-2}\,dt}{(b-f)\,.\,(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^{2}}=0.$$

Dans quels cas elle eſt intégrable.

Si donc on ſuppoſe dans cette équation $g=-cm-am(m-1)$; c'eſt-à-dire à cauſe de $c=-a(n-1)$, $g=am.(n-1)-am.(m-1)=am.(n-m)$, & $h=-fk-bk.(k-1)$, elle ſera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m-n}{n}$ égale à i, c'eſt-à-dire à un nombre entier poſitif; ou bien encore lorſqu'on aura $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ égal à un nombre entier négatif.

Si l'on a de plus dans l'équation $dy+\frac{y^{2}dt}{b-f}+\{b.abm(n-m)+afk+abk(k-1)-fk-bk.(k-1)t^{\frac{bn}{b-f}}\}\times\frac{t^{\frac{bn}{b-f}-2}\,dt}{(b-f).(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^{2}}=0$, ſi l'on a, dis-je, $f=b-bn$, alors on aura $b-f=bn$, $\frac{bn}{b-f}=1$, & l'équation précédente devient celle-ci $dy+\frac{y^{2}dt}{bn}+\frac{b[am.(n-m)-ak.(n-k)+k.(n-k)t]dt}{nt.(t-a)^{2}}=0$, laquelle ſera intégrable dans le cas où $\frac{k+m}{n}$ ſera égal à $\pm i$, c'eſt-à-dire à un nombre entier poſitif ou négatif. De là il ſuit qu'en ſuppoſant $k=n$, l'équation $dy+\frac{y^{2}dt}{bn}+\frac{abm.(n-m)\,dt}{nt.(t-a)^{2}}=0$ ſera intégrable, ſi $\frac{m}{n}$ eſt égal à un nombre entier quelconque. Si $m=n$, l'équation $dy+\frac{y^{2}dt}{bn}-\frac{[abk.(n-k)+bk.(n-k)t^{2}]dt}{nt.(t-a)^{2}}=0$ ſera intégrable, lorſque $\frac{k}{n}$ ſera un nombre entier quelconque.

CCLXXXV.

Seconde transformation pour l'équation (*V*).

Seconde Transformation. Soit reprise l'équation (*V*) $(a+bx^n)x^2dz+(c+fx^n)xzdx+(a+bx^n)z^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$, dans laquelle on suppose

$$g=-cm-am.(m-1)$$

& . . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

& qui est alors intégrable, toutes les fois que

$$f=(1-k-m-in)b,$$

ou que . . . . $c=(1-k-m+in)a$,

nous la transformerons encore en une équation de trois termes en faisant $z=Ty+S$, T & S représentent des fonctions de x. Cette supposition nous donne

$$dz=Tdy+ydT+dS$$

$$z^2=T^2y^2+2TSy+SS,$$

& pour transformée l'équation suivante (*F*) $(a+bx^n)Tx^2dy+(a+bx^n)x^2ydT+(a+bx^n)x^2dS+(c+fx^n)Tyxdx+(c+fx^n)Sxdx+(a+bx^n)T^2y^2x^2dx+2(a+bx^n)TSyx^2dx+(a+bx^n)S^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$. Maintenant afin de faire évanouir le terme affecté de y, supposons $(a+bx^n)xdT+2.(a+bx^n)TSxdx+(c+fx^n).Tdx=0$, on aura $\frac{dT}{T}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}=0$. Soit $T=x^p$, de telle sorte qu'après avoir divisé par $(a+bx^n)Tx^2$, le coefficient de ydx soit une puissance simple de x; on aura $\frac{pdx}{x}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)dx}=0$, & par conséquent

$\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{(a+bx^n)x} = 0$: donc $S = -\frac{p}{2x}$

$\frac{-c-fx^n}{2x.(a+bx^n)} = \frac{-ap-c-(f+bp)x^n}{2x.(a+bx^n)}$: donc $dS =$

$$\frac{-(fnx^{n-1}+bnpx^{n-1})dx \cdot 2x(a+bx^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$$\frac{-(2adx+2b(n+1)x^n dx).-(c+ap+(f+bp)x^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$=$ (en réduiſant)

$$\frac{a(c+ap)dx-a(n-1).(f+bp)x^n dx+b(f+bp)x^{2n}dx+b(n+1).(c+ap)x^n dx}{2x^2.(a+bx^n)^2}:$$

ſubſtituant dans l'équation (F) pour T, T^2, S, S^2, dS leurs valeurs, effaçant le terme que nous y avons ſuppoſé égal à zéro & réduiſant, on aura $(a+bx^n)x^{p+2}dy + (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$

$$\frac{2acdx+2a^2pdx-2afnx^n dx+2afx^n dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abpx^n dx+2bfx^{2n}dx+2b^2px^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2bcnx^n dx+2bcx^n dx+2abpx^n dx-ccdx}{4.(a+bx^n)}$$

$$\frac{-2cfx^n dx-ffx^{2n}dx+a^2p^2dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abp^2x^n dx+b^2p^2x^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} + gdx + hx^n dx = 0;$$

& en diviſant par $a+bx^n$ les termes dont ce binome eſt un diviſeur exact, on aura la transformée ſuivante $(a+bx^n).x^{p+2}dy + (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$

$$\frac{p.(p+2).(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^n dx}{2}$$

$\frac{-ccdx+2n(bc-af)x^n dx-2cfx^n dx-ffx^{2n}dx}{4\cdot(a+bx^n)} = 0$; & enfin en diviſant par $(a+bx^n)x^{p+2}$, on a l'équation

(*H*) $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^n dx}{2x^{p+2}\cdot(a+bx^n)}$ Equation transformée (*H*).

$-\frac{(c+fx^n)^2 dx+2n(bc-af)x^n dx}{4\cdot(a+bx^n)^2 x^{p+2}} = 0$. Or cette équation ſera intégrable, dans les cas où g étant $= -cm-am(m-1)$ & $h = -fk-bk\cdot(k-1)$, on aura $f=(1-k-m-in)b$, ou $c=(1-k-m+in)a$; c'eſt-à-dire, toutes les fois que l'une des deux quantités $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$, ou $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ ſera égale à un nombre entier poſitif. Dans quels cas elle eſt intégrable.

CCLXXXVI.

Maintenant faiſons 1°. $bc=af$, ou $f=\frac{bc}{a}$, l'équation (*H*) devient celle-ci $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(ac+2ag)dx+(bc+2ah)x^n dx}{2ax^{p+2}\cdot(a+bx^n)}-\frac{\left(cc+\frac{2bccx^n}{a}+\frac{b^2c^2x^{2n}}{aa}\right)dx}{4x^{p+2}\cdot(a+bx^n)^2} = 0$; c'eſt-à-dire, en réduiſant $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{x^{p+2}\cdot(a+bx^n)}+\frac{cdx}{2ax^{p+2}}-\frac{ccdx}{4aax^{p+2}} = 0$; ou bien en mettant au même dénominateur les deux derniers termes & retranchant en même temps $\frac{aadx}{4aax^{p+2}}$, on aura (*L*) $dy+y^2x^p dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}} = 0$. En ſuppoſant dans cette équation $g=-cm-$ Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (*H*). Premiere équation particuliere.

Quels ſont ſes cas d'intégrabilité.

$am(m-1)$ & $h = -\frac{b}{a} \times ck + ak(k-1)$, elle ſera intégrable toutes les fois que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ ſera un nombre entier poſitif ou négatif. Faiſons de plus dans cette équation $c = a$, on aura en mettant pour g & h leurs valeurs, $dy + y^2x^p dx + \frac{(p+1)^2 dx}{4x^{p+2}} - \frac{(amm+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}} = 0$, qui ſera intégrable ſi $\frac{k+m}{n}$ eſt égal à un nombre entier quelconque.

CCLXXXVII.

2°. Soit dans l'équation (H) $b = 0$, elle ſe change en celle-ci $dy + y^2x^p dx + \frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(2ac+4ag)dx}{4a^2x^{p+2}} + \frac{(af+2ah)x^n dx}{2a^2x^{p+2}} - \frac{(cc+2cfx^n+ffx^{2n}+2afnx^n)dx}{4a^2x^{p+2}} = 0$; & en retranchant & ajoutant comme plus haut $\frac{dx}{4x^{p+2}}$, on a (O) $dy + y^2x^p dx + \frac{(p+1)^2a^2dx}{4a^2x^{p+2}} - \frac{(a-c)^2dx}{4a^2x^{p+2}} + \frac{4agdx}{4a^2x^{p+2}} + \frac{(af+2ah-afn-cf)x^n dx}{2aax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} = 0$,

Seconde équation particuliere.

équation intégrable, ſi . . $g = -cm - am(m-1)$

Dans quels cas elle ſe peut intégrer.

& . . . . . $h = -fk$,

toutes les fois qu'on aura $f = (1-k-m-in)b$, ou $c = (1-k-m+in)a$, c'eſt-à-dire toutes les fois que $f = 0$, ou que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ eſt un nombre entier poſitif. Dans le cas où $f = 0$, l'équation (O) en y ſuppoſant $(p+1)^2a^2 - (a-c)^2 + 4ag = AA$ devient $dy + A^2x^{-p-2}dx + y^2x^p dx = 0$, qui eſt l'équation de Ricati. Donc (Sect. I. Chap. IX. Art. CXIX.) elle s'inté-

grera toutes les fois qu'on aura $-p-2=\frac{(2h+1)\times-p-4h}{2k+1}$, h représentant un nombre entier positif f en commençant par l'unité, c'est-à-dire, lorsque p sera $=1$; ce qui est évident, puisqu'alors l'équation devient $x^3dy+y^2x^4dx+adx=0$, laquelle est dans le cas de la formule de M. Bernoulli traitée dans le Chapitre VII. Sect. I.

CCLXXXVIII.

Soit dans l'équation (O) $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, & $af-naf-2afk-cf=aef$, on aura $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a(p+1)^2}{4a}$, & $c=a-na-2ak-ae$. Donc mettant cette valeur de c dans g, on a $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+e)^2}{4}-\frac{a(p+1)^2}{4}$. Après avoir fait ces substitutions, on a (Q) $dy+y^2x^pdx+\frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}+\frac{efx^ndx}{2ax^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4a^2x^{p+2}}=0$. Dans cette équation on doit avoir $g=-cm-am.(m-1)$: mais $c=a-na-2ak-ae$, & $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+e)^2}{4}-a(p+1)^2$; donc on aura $g=am.(n+2k+e)-amm$. Donc $4m\times(n+2k+e)=\alpha+(n+2k+e)^2-(p+1)^2+4mm$. Donc $(n+2k+e)^2-4m.(n+2k+e)+4mm=(p+1)^2-\alpha$. Donc enfin $n+2k+e=nm\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}$; & l'équation sera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{m-n-k-e}{n}$, ou $\frac{-n-e\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}}{2n}$ égal à un nombre entier positif.

Troisieme équation particuliere.

Dans quels cas elle se peut intégrer.

CCLXXXIX.

Soit dans l'équation (Q) $\alpha=0$ & $e=0$, elle devient

Quatrieme équation particuliere.

$dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa}$, intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ égal à un nombre entier positif. C'eſt ce qui eſt évident par ce que nous avons déja vu tant de fois dans ce Chapitre, & ce qu'on retrouveroit encore par l'Article CXIX. du Chapitre IX. Sect. I. puiſque cette équation eſt celle de Ricati, qui eſt par conſéquent intégrable dans tous les cas où $m = \frac{(2h \pm 1)n - 4h}{2h \mp 1}$, h repréſentant un nombre entier poſitif. Mettant ici pour m ſa valeur $2n - p - 2$, & pour n ſa valeur p, on retrouvera pour l'intégrabilité la même condition que ci-deſſus.

Ses cas d'intégrabilité.

CCXC.

Cinquieme équation particuliere (φ).

Soit dans (Q) α ſeulement $= 0$, on aura (φ) $dy + y^2 x^p dx + \frac{\epsilon f x^n dx}{2a x^{p+2}} - \frac{ff x^{2n} dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$; équation intégrable, toutes les fois que $\frac{-n - \epsilon \pm (p+1)}{2n} = i$, c'eſt-à-dire un nombre entier poſitif. On aura donc $-n - \epsilon \pm (p+1) = 2in$, & par conſéquent $\epsilon = \pm (p+1) - n.(2i \pm 1)$: de-là il ſuit que l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa} + \frac{fn(2i+1) \mp f(p+1) x^{n-p-2} dx}{2a}$ eſt toujours intégrable. Si dans cette équation on ſuppoſe 1°. $p = 0$, $n = 2$; 2°. $p = 0$, $n = 1$; 3°. $p = -1$, $n = 1$, on aura les équations ſuivantes qui ſeront intégrables

Ses cas d'intégrabilité.

Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (φ).

$dy + y^2 dx = \frac{ff x^2 dx}{4aa} + \frac{f(4i+2 \mp 1) dx}{2a}$, $dy + y^2 dx = \frac{ff dx}{4aa} + \frac{f(2i+1 \pm 1) dx}{2ax}$, $dy + \frac{y dx}{x} + \frac{ff x dx}{4aa} + \frac{f(2i+1) dx}{2a}$.

CCXCI.

CCXCI.

Soit dans l'équation (Q) ϵ ſeulement $= 0$, on aura l'équation ſuivante (ξ) $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} - \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}$, laquelle ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $-\frac{n \pm \sqrt{(p+1)^2 - \alpha}}{2n} = i$, c'eſt-à-dire un nombre entier poſitif. On aura donc $2in + n = \pm\sqrt{[(p+1)^2 - \alpha]}$; & en élevant au quarré $n^2(2i+1)^2 = (p+1)^2 - \alpha$. Donc $\alpha = (p+1)^2 - n^2.(2i+1)^2$. Donc l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{[n^2(2i+1)^2 - (p+1)^2]dx}{4x^{p+2}}$ eſt toujours intégrable. Donc en ſuppoſant $p = 0$, $\frac{ff}{4aa} = A$, on aura l'équation $dy + y^2 dx = Ax^{2n-2}dx + \frac{[n^2.(2i+1)^2 - 1]dx}{4xx}$ qui eſt toujours intégrable. Donc en ſuppoſant ſucceſſivement $p = 0$, $n = 1$; $p = 0$, $n = 2$; $p = 0$, $n = 3$, &c. on aura les équations ſuivantes

$$dy + y^2 dx = Adx + \frac{i(i+1)dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = Ax^2 dx + \frac{4i.(i+1)dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = Ax^4 dx + \frac{9i.(i+1)dx}{xx},$$

& une infinité d'autres qui ſeront intégrables.

Sixieme équation particuliere (ξ).

Ses cas d'intégrabilité.

Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ).

CCXCII.

Je reprends l'équation (Q) $dy + y^2 x^p dx = \frac{(ffx^{2n} - 2a\epsilon fx^n - \alpha a^2)dx}{4aax^{p+2}}$, & je ſuppoſe $\alpha = -\epsilon^2$, on aura $dy + y^2 x^p dx = (ffx^{2n} - 2a\epsilon fx^n + a^2\epsilon^2)\frac{dx}{4aax^{p+2}}$

Septieme équation particuliere.

Dans quels cas elle eſt intégrable.

$= \frac{(fx^n - ac)^2 dx}{4aax^{p+2}}$; & cette équation ſera intégrable, toutes les fois que $-n-c-\sqrt{(p+1)^2+c^2} = 2in$. Donc alors on aura $2in+n+c = \pm\sqrt{(p+1)^2+c^2}$; & en quarrant les deux membres, on a $4i^2n^2+4in^2+4cin+n^2+2cn+cc = (p+1)^2+cc$; donc en réduiſant $c = \frac{(p+1)^2-n^2(2i+1)^2}{2n.(2i+1)}$. Donc l'équation $dy+y^2x^p dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-(p+1)^2}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x^{p+2}}$ eſt toujours intégrable. Donc en donnant ſucceſſivement à p & à n différentes valeurs, on aura différentes équations intégrables. Soit, par exemple, $p = 0$, on aura l'équation intégrable $dy+y^2dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-1}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \times \frac{dx}{xx}$. Si $p = -1$, on aura pour lors $dy+\frac{y^2dx}{x} = \left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x}$ qui eſt intégrable.

CCXCIII.

Soit dans l'équation (Q) $x^{p+1} = t$,

on aura . . . . . $x = t^{\frac{1}{p+1}}$

$$x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$$

$$x^{p+2} = t^{\frac{p+2}{p+1}}$$

$$dx = \frac{1}{p+1} t^{\frac{-p}{p+1}} dt$$

$$\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$$

$$x^p dx = \frac{dt}{p+1}.$$

Donc la transformée ſera $dy + \frac{y^2\,dt}{p+1} = \left\{\frac{n^2(2i+1)^2-(p+1)^2}{2n.(2i+1)} \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a}\right\} \times \frac{dt}{(p+1)\,tt}$; ou $(p+1)\,dy + y^2\,dt = \left\{\frac{n^2.(2i+1)^2-(p+1)^2}{2n.(2i+1)} + \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a}\right\} \times \frac{dt}{tt}$; équation qui eſt intégrable.

Huitieme équation particuliere intégrable.

CCXCIV.

En ſuivant cette méthode on trouveroit encore les cas d'intégrabilité d'un grand nombre d'équations différentielles qui ne ſont pas intégrables abſolument ; la difficulté ne conſiſteroit que dans la longueur du calcul. Par exemple, ſi l'on veut chercher les cas d'intégrabilité de l'équation $(a + bx^n + cx^{2n})\,x^2\,ddv + (f + gx^n + hx^{2n})\,x\,dx\,dv + (p + qx^n + rx^{2n}).\,v\,dx^2 = 0$, on les trouveroit en faiſant $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. ou bien $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} +$ &c. On détermineroit les coefficients $A, B, C, D,$ &c. de la même maniere que nous avons déterminé ceux des Articles CCLXXIII. & CCLXXV. ; mais on doit remarquer ici qu'il faut que deux de ces coefficients ſoient égaux à zéro, pour que les autres s'évanouiſſent. C'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre en mettant dans la propoſée pour v, dv, ddv leurs valeurs tirées de l'une des deux ſeries précédentes. Par exemple, ſi on ſe ſert de la ſerie premiere, on trouvera qu'afin que $v = Ax^m$ il faut que $p + fm + am\,(m-1) = 0$, & qu'en même temps $q + gm +$

Application de la méthode précédente à une formule différentielle du ſecond ordre plus compliquée que la formule (*M*).

$bm.(m-1)=0$ & $r+hm+cm(m-1)=0$. Pour que $v=Ax^m+Bx^{m+n}$ il ſera néceſſaire qu'on ait

1°. $B=A.\{q+gm+bm(m-1)\}$

2°. $0=p+fm+am(m-1)$

3°. $0=r+h(m+n)+c(m+n).(m+n-1)$

4°. $n^2.\{h+c(2m+n-1)\}.\{f+a(2m+n-1)\}+\{q+gm+bm.(m-1)\}.\{q+g.(m+n)+b.(m+n).(m+n-1)\}=0$, & ainſi de ſuite.

CHAPITRE X.

Examen de pluſieurs équations différentielles du ſecond ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV.

Application à une équation différentielle du ſecond ordre.

THEOREME. L'Equation différentielle du ſecond ordre $ddu+\mathfrak{t}dudx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ eſt intégrable dans les mêmes cas dans leſquels on peut intégrer la ſuivante $ddu+\mathfrak{t}dudx+uXdx^2=0$, qui, comme on le voit, a un terme de moins. $\mathfrak{t}$, X & ζ dans la premiere équation, $\mathfrak{t}$ & X dans la ſeconde ſont des fonctions de x.

DEMONSTRATION. Je ſuppoſe $du+tQdx=0$; t & Q étant deux indéterminées; ſubſtituant pour du & ddu

leurs valeurs dans la propoſée, la diviſant enſuite par $Q\,dx$ & changeant les ſignes, on aura $dt + \frac{t\,dQ\,dx}{Q\,dx} + t\,\xi\,dx - \frac{u\,X\,dx}{Q} - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$. A cette équation j'ajoute l'équation $du + tQ\,dx = 0$, j'aurai (A) $du + dt + (tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dx} + \xi t - \frac{uX}{Q}) \times dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$. Or cette équation ſeroit intégrable, ſi elle ſe pouvoit ramener à la forme ſuivante $du + dt + (u + t).P\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$, P & Q étant des fonctions connues de x. Car en faiſant $u + t = r$, $du + dt = dr$, on auroit $dr + r\,P\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$; équation réduite à la formule du Chapitre VII. & qui nous donne $r = Gc^{-\int P\,dx} + c^{-\int P\,dx} \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx$. Donc (B) $u = Gc^{-\int P\,dx} + c^{-\int P\,dx} \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx - t$; $du = -Gc^{-\int P\,dx} P\,dx - c^{-\int P\,dx} P\,dx \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx + \frac{\zeta}{Q}\,dx - dt$. Subſtituant cette valeur dans $du + tQ\,dx = 0$, on aura une équation réductible encore au cas du Chapitre VII. & qui nous donnera la valeur de t en x. Donc en mettant dans (B) pour t cette valeur, on aura celle de u en x. Donc, dans l'hypotheſe précédente, l'équation $ddu + \xi\,du\,dx + uX\,dx^2 + \zeta\,dx^2 = 0$ ſera intégrée.

Or pour que l'équation (A) ſe puiſſe ramener à la ſuivante $dt + du + (u + t).P\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$, il faut que $tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dx} + \xi t - \frac{u\,X}{Q} = (u + t).P$; ce qui arrivera, ſi $-\frac{X}{Q} = \xi + Q + \frac{dQ}{Q\,dx}$. Car alors on aura $du + dt + \left\{ (\xi + Q + \frac{dQ}{Q\,dx}) \times t + (\xi + Q + \frac{dQ}{Q\,dx})\,u \right\} \times dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$; & en ſuppoſant $\xi + Q + \frac{dQ}{Q\,dx} = P$, on

aura $du+dt+(u+t).P-\frac{\zeta dx}{Q}=0$. Mais de l'équation $\xi+Q+\frac{dQ}{Q\,dx}=-\frac{X}{Q}$ on tire $Xdx+\xi Q dx+QQdx+dQ=0$; donc toutes les fois que cette derniere équation ſera intégrable, $ddu+\xi du dx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ le ſera auſſi.

CCXCVI.

Prenons maintenant l'équation $ddu+\xi dudx+uXdx^2=0$, & cherchons l'équation de condition d'après laquelle elle ſeroit intégrable. Je ſuppoſe ſuivant la méthode de M. Euler, expoſée dans le Chapitre V. de cette ſeconde Section, $u=c^{\int y dx}$, dx étant toujours conſtant, on aura $du=c^{\int y dx}ydx$; $ddu=c^{\int y dx}dydx+c^{\int y dx}y^2dx^2$. Donc après les ſubſtitutions & réductions on aura la transformée ſuivante $Xdx+y\xi dx+yydx+dy=0$. Donc ſi cette équation eſt intégrable, l'équation $ddu+\xi du dx+uXdx^2=0$ le ſera auſſi; réciproquement ſi cette derniere équation eſt intégrable, la premiere le ſera, c'eſt-à-dire, qu'on aura la valeur de y en x. Car puiſqu'on a par l'hypotheſe la valeur de u en x & que $y=\frac{du}{udx}$, on aura donc la valeur de y dans l'équation $Xdx+\xi ydx+yydx+dy=0$. Or cette équation eſt, comme on le voit, la même abſolument que la réduite $Xdx+Q\xi dx+QQdx+dQ=0$. Donc l'équation $ddu+\xi du dx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que la ſuivante $ddu+\xi du dx+uXdx^2=0$ laquelle a un terme de moins. *C. Q. F. D.*

Cherchons maintenant quelques cas particuliers d'intégration des équations précédentes.

CCXCVII.

Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui sert d'exemple.

THEOREME. Si dans l'équation $ddu + \xi dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$, ξ contient un terme de cette forme $\frac{A}{x}$, il sera toujours possible de faire évanouir ce terme, excepté dans le cas où $A = 1$.

En effet, divisant l'équation par dx, elle devient $\frac{ddu}{dx} + \frac{Adu}{x} + uXdx + \zeta dx = 0$, que l'on peut (Art. CCIII.) mettre sous la forme suivante $d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{Adu}{x} + \&c. = 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{du}{dx}$ est une quantité finie; je suppose dx variable, & j'aurai $\frac{ddu}{dx} - \frac{dudd x}{dx^2} + \frac{Adu}{x} + uXdx + \zeta dx = 0$; ou $ddu - \frac{dudd x}{dx} + \frac{Adudx}{x} + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$.

Soit maintenant $x = fz^k$ & dz constant, la transformée sera $ddu - \frac{(k-1).dzdu}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$, ou $ddu - \frac{kdzdu}{z} + \frac{dzdu}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$. Supposons $k = \frac{-1}{A-1}$, on aura $ddu + \frac{dzdu}{(A-1).z} + \frac{dzdu}{z} - \frac{Adzdu}{(A-1).z} + \&c. = 0$; ou enfin $ddu + \frac{dzdu}{(A-1).z} + + \frac{Adzdu}{(A-1).z} - \frac{dzdu}{(A-1).z} - \frac{Adzdu}{(A-1).z} + \&c. = 0$. Donc il est évident que toutes les fois que A ne sera pas $= 1$. la substitution de $x = fz^{\frac{1}{A-1}}$ fera évanouir le second terme de l'équation qui deviendra pour lors $ddu + Bu\varphi(z)dz^2$.

$+C\Gamma(z)\,dz^2=0$, $\varphi(z)$ & $\Gamma(z)$ étant des fonctions différentes de z.

Donc en général ſi on a $ddu+\frac{Adudx}{x}+uBx^m dx^2+\zeta dx^2=0$, cette différentielle ſe réduit à l'équation $ddu+uRz^p dz^2+\zeta' dz^2=0$.

Soit $du+tQdz=0$; en mettant pour ddu ſa valeur, diviſant l'équation par Qdz & changeant les ſignes, on aura la transformée ſuivante $dt+\frac{tdQdz}{Qdz}-\frac{uRz^p dz}{Q}-\zeta' dz=0$. A cette équation j'ajoute celle-ci $du+tQdz=0$; ce qui me donne $du+dt+\left(tQ+\frac{tdQ}{Qdz}-\frac{uRz^p}{Q}\right)\times dz-\zeta' dz=0$, équation intégrable dans le cas où $tQ+\frac{tdQ}{Qdz}-\frac{uRz^p}{Q}=(u+t)\times P$. Cette propoſition ſe démontreroit de la même façon dont nous l'avons démontrée Article CCXCV.

Or pour que $tQ+\frac{tdQ}{Qdz}-\frac{uRz^p}{Q}=(u+t)\times P$, il faut que $-\frac{Rz^p}{Q}=Q+\frac{dQ}{Qdz}$. Donc l'équation $ddu+uRz^p dz^2+\zeta' dz^2=0$ s'integrera dans les mêmes cas que l'équation $Rz^p dz+QQdz+dQ=0$, qui eſt l'équation de Ricati. Nous avons donné les cas d'intégration de cette formule aux Articles CXVIII. & ſuivants de cette ſeconde Partie.

CCXCVIII.

THEOREME 2. Si $A=1$, l'équation ſera $ddu+\frac{dudx}{x}+uBx^m dx^2+\zeta dx^2=0$; en faiſant toujours $du+tQdx=0$ & ſuivant les mêmes procédés que dans les Articles précédents,

précédents, l'intégration ſe réduira à celle de $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$. Soit dans cette équation $Q = rx^{-1}$, la transformée ſera $Bx^m dx + \frac{r^2 dx}{xx} + \frac{dr}{x} = 0$; intégrable dans le cas où $m = -2$, puiſqu'elle devient alors $Bdx + xdr + rrdx = 0$. On trouvera les autres cas d'intégration de l'équation $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$, en ſe ſervant des méthodes employées dans le Chapitre XI. de la premiere Section de cette ſeconde Partie.

CCXCIX.

THEOREME 3. Reprenons l'équation de condition de l'Art. CCXCVI. $Xdx + \mathfrak{t}Qdx + QQdx + dQ = 0$; & faiſons dans cette équation $X = Ax^m$ & $\mathfrak{t} = Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$, la même que celle dont nous avons trouvé les cas d'intégrabilité dans le Chapitre XI. de la premiere Section. Soit donc comme dans l'Article CXXVI. $Q = Bx^r + fx^s z^t$, p, r, f, s, t étant des indéterminées priſes à volonté, on aura la transformée ſuivante $Ax^m dx + Bpx^{n+r} dx + Bfz^t x^{n+s} dx + ppx^{2r} dx + 2fpz^t x^{s+r} dx + ffz^{2t} x^{2s} dx + prx^{r-1} dx + fsz^t x^{s-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz = 0$; intégrable dans tous les cas où elle ſe peut réduire à une équation de cette forme $X' z^{t-1} dz + z^t X'' dx + z^{2t} X''' dx = 0$, X', X'', X''' étant des fonctions ou des puiſſances de x, puiſqu'alors c'eſt le cas de M. Bernoulli, traité dans les Articles XCV. & ſuivants. La trans-

formée ſera encore intégrable, toutes les fois qu'elle tombera dans les cas intégrables de l'équation de Ricati.

CCC.

REMARQUE. En faiſant $X = Ax^m + x^{-1}$, l'équation de condition ſera $Ax^m dx + x^{-1} dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$; dont la transformée ne ſera pas, comme il eſt aiſé de le voir, plus compliquée que celle du Théorême précédent. On en trouvera par la même méthode les cas d'intégrabilité.

CCCI.

THEOREME 4. Soit dans l'équation de condition $\zeta = 0$ & $X = Ax^m + Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + Bx^n dx + QQdx + dQ = 0$, dont on trouvera encore les cas d'intégrabilité en faiſant $Q = px^r + fx^s z^t$.

CCCII.

Autre formule à laquelle s'applique notre méthode.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Dans le Chapitre IX. de cette préſente Section, nous avons vu comment on pouvoit dans certains cas intégrer l'équation différentielle $(a + bx^n) \times x^2 dd_r + (c + fx^n) . xdxd_r + (g + hx^n) \times rxdx^2 = 0$. Il s'enſuit du Théorême premier de ce Chapitre, qu'on pourra dans les mêmes cas intégrer cette équation augmentée d'un terme ζdx, ζ étant une fonction quelconque de x.

CCCIII.

SCHOLIE. Reprenons l'équation $ddu + \xi du dx + uX dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, & au lieu de ſuppoſer $du + tQ dx = 0$, ſuppoſons $du - EtQ dx = 0$, E étant un coefficient indéterminé ; nous aurons la transformée ſuivante $EQ dt dx + Et dQ dx + EtQ\xi dx^2 + uX dx^2 + \zeta dx^2 = 0$. Multipliant cette ſeconde équation par un coefficient indéterminé ν, & la diviſant par $EQ dx$, on aura $\nu dt + \frac{\nu t dQ dx}{Q dx} + \nu t\xi dx + \frac{\nu u X dx}{EQ} + \frac{\nu\zeta dx}{EQ} = 0$. J'ajoute à cette équation la ſuivante $du - EtQ dx = 0$, & je les diviſe par ν, j'aurai $\frac{du}{\nu} + dt + \left\{\frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \xi t + \frac{\nu u X}{E\nu Q}\right\} . dx + \frac{\zeta dx}{EQ} = 0$; équation intégrable (Art. CCXCV.), ſi $\frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \xi t + \frac{\nu u X}{E\nu Q} = \left(\frac{u}{\nu} + t\right) \times P'$. Or il faut pour cela que $\frac{\nu X}{EQ} = \frac{dQ}{Q dx} - \frac{EQ}{\nu} + \xi$; ce qui donne pour nouvelle équation de condition (D) $Xdx - \frac{EQ.dx}{\nu} + \frac{E.Q.dx}{\nu^2} - \frac{E dQ}{\nu} = 0$. Mais il eſt viſible que cette nouvelle ſuppoſition ne rend pas la ſolution fondamentale plus générale, puiſque la nouvelle équation de condition (D) & la premiere $Xdx + Q\xi dx + QQ dx + dQ = 0$ reviennent à la même, en mettant dans l'équation (D) Q pour $-\frac{EQ}{\nu}$.

CCCIV.

COROLLAIRE. En général toute équation $X'dx + \xi' u dx + X' u^2 dx + du = 0$ deviendra $Xdx + \xi y dx +$

$yydx+dy=0$ en faiſant $X''u=y$; puiſque cette ſuppoſition nous donne $u=\frac{y}{X''}$, $du=\frac{dy}{X''}-\frac{ydX''}{X''^2}$ & pour transformée $Xdx+\zeta ydx+y^2dx+dy=0$, X étant $=X'X''$ & $\zeta=\frac{\zeta'}{X}-\frac{dX''}{X''^2dx}$.

On peut même changer cette équation en celle-ci $\frac{X'dx}{r}+X''y^2rdx+dy=0$, qui dans certains cas pourroit être plus commode. Il faut pour cet effet ſuppoſer $u=yr$ & $\frac{dr}{r}+\zeta dx=0$. Car alors la transformée ſera $X'dx+yr\zeta dx+y^2r^2X''dx+rdy+ydr=0$. Diviſons par yr, elle devient $\frac{X'dx}{yr}+\zeta dx+X''yrdx+\frac{dy}{y}+\frac{dr}{r}=0$; & à cauſe de $\frac{dr}{r}+\zeta dx=0$, $\frac{Xdx}{yr}+X''yrdx+\frac{dy}{y}=0$; ou enfin $\frac{X'dx}{r}+X''y^2rdx+dy=0$.

CCCV.

COROLLAIRE 2. Puiſque l'équation $ddu+\frac{dudx}{x}+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ ſe réduit (Théorême 2.) à $Xdx+Qx^{-1}dx+QQdx+dQ=0$, il s'enſuit qu'en faiſant $Q=\frac{y}{x}$, elle ſe réduira à $xXdx+\frac{y^2dx}{x}+dy=0$. En effet la transformée ſera $Xdx+yx^{-2}dx+y^2x^{-2}dx+x^{-1}dy-yx^{-2}dx=0$; c'eſt-à-dire $Xdx+y^2x^{-2}dx+x^{-1}dy=0$; & en multipliant par x, $xXdx+\frac{yydx}{x}+dy=0$.

CCCVI.

On peut appliquer la méthode expliquée dans ce Chapitre à des équations d'un ordre plus élevé que le ſecond.

Application de la méthode à une équation différentielle du troisieme ordre.

Soit, par exemple, l'équation du troiſieme ordre $d^3u + \xi\,ddu\,dx + X\,du\,dx^2 + u\zeta\,dx^3 + \chi\,dx^3 = 0$; ξ, X, ζ, χ étant des fonctions de x. En faiſant $ddu + Q\,dt\,dx + t\,N\,dx^2 = 0$, Q, t, N étant trois indéterminées, on trouvera que la propoſée eſt réductible à une équation du ſecond degré de cette forme $ddz + R'dz\,dx - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$; ſi $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$ & $\zeta + NQ - \frac{dN}{dx} - \xi N = 0$. Car ſuivant la ſuppoſition précédente la transformée ſera, après les ſubſtitutions ordinaires, $-Q\,dx\,ddt - dQ\,dt\,dx - \xi Q\,dt\,dx^2 - N\,dt\,dx^2 + X\,du\,dx^2 - t\,dN\,dx^2 - \xi t N\,dx^3 + u\zeta\,dx^3 + \chi\,dx^3 = 0$. Diviſant cette équation par $-Q\,dx$ & y ajoutant l'équation $ddu + Q\,dt\,dx + t\,N\,dx^2 = 0$, on aura $ddu + ddt + \left(\frac{dQ}{Q\,dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q}\right) \times dt\,dx - \left(\frac{X}{Q}\right) \times du\,dx + \left(\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ\right) \times \frac{t\,dx^2}{Q} - (\zeta)\frac{n\,dx^2}{Q} - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$. Donc ſi $(F)\ \frac{dQ}{Q\,dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q} = -\frac{X}{Q}$, & que $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$, on aura en ſuppoſant l'un & l'autre membre de l'équation $(F) = R'$, $ddu + ddt + (du + dt) \times R'dx - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$; & enfin en faiſant $du + dt = dz$, on trouve $ddz + R'dx\,dz - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$.

Or en ſubſtituant dans l'équation $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$ pour N ſa valeur tirée de l'équation (F) qui devient $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$, on trouvera une équation différentielle du ſecond degré dont Q ſera l'inconnue qu'il faudra déterminer en x. Donc l'intégration

de l'équation $d^3u + \zeta\, dd u\, dx + X\, du\, dx^2 + u\zeta\, dx^3 + x\, dx^3 = 0$, ſe réduit à celle d'une équation différentielle du ſecond ordre.

F I N.

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans cette Seconde Partie.

AVANT-PROPOS, *Page* iij
Supplément à la Premiere Partie, vij

Diviſion générale de cette Seconde Partie, *Page* 1
Obſervation ſur l'addition de la conſtante à l'intégrale trouvée, 2

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou pluſieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en ſéparer auparavant les indéterminées & ſans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

I. 1°. Lorſqu'elles ſont des quantités entieres, 3
II. 2°. Lorſqu'elles ſont fractionnaires, *ibid.*
IV. 3°. Lorſqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puiſſances, 4
VII. 4°. Lorſque ces quantités renferment des Logarithmes, 5

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII. Ce que c'eſt qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, 6
IX. Ce que c'eſt que la méthode inverſe des tangentes, 7
X. Lemme préparatoire, *ibid.*
XI. Exemples, 8

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle compoſée de pluſieurs variables eſt la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problême néceſſaire pour ce qui ſuit, 10
XV. Solution de ce Problême ſur un exemple, *ibid.*
XVI. Solution générale du Probleme, 12

§. I. *Expoſition de la Méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII. Théorême fondamental, *ibid.*
XVIII. Autre maniere de préſenter le Théorême précédent, 14
XX. Son application à quelques différentielles, 15
Premier exemple, *ibid.*
XXI. Second exemple, 16
XXIII. Application du Théorême aux équations différentielles à deux variables, *ibid.*

Maniere d'intégrer les quantités $Adx+Bdy$ *& les équations* $Adx+Bdy=0$, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

XXIV. Appliquée 1°. aux différentielles $Adx+Bdy$, 17
XXV. Exemple particulier, *ibid.*
XXVI. 2°. Application de cette méthode aux équations $Adx+Bdy=0$, 18

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII. Moyen de s'aſſurer ſi les équations repréſentées par $Adx+Bdy+Cdz=0$ ſont intégrables, 19
XXIX. Exemple, 21
XXX. Intégration des équations completes à trois variables, 22

XXXI.

XXXI. Application à un exemple particulier, 23
XXXII. Second exemple, *ibid.*
XXXIII. Quand une équation différentielle à trois variables n'eſt pas complete, on peut quelquefois la rendre telle, en la multipliant par un facteur commun à tous ſes termes, 25
Il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales, *ibid.*
XXXIV. Premiere démonſtration, 26
XXXV. Leur différence en cela des équations à deux variables, 27
XXXVI. Qui expriment toujours une courbe dont la conſtruction eſt poſſible, *ibid.*
XXXVII. Seconde démonſtration que pluſieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune conſtruction, 28
Cette démonſtration ſe fait par les ſurfaces courbes, *ibid.*
XL. Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorſqu'elle eſt ſuſceptible d'intégration ou de conſtruction, 31
XLI. Application du Théorême aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables, 33
XLII. Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables, 34
Méthode pour s'aſſurer ſi elles peuvent devenir completes, lorſqu'elles ne le ſont pas, *ibid.*
Nombre d'équations à vérifier, *ibid.*
XLIII. Ce nombre peut quelquefois ſe diminuer. Preuve ſur une équation à quatre variables, 35

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

XLVII. Ce qu'il faut faire avant que de conſtruire l'équation, 38
XLVIII. Procédé pour faire la conſtruction, *ibid.*

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

LII. Exemple de cette ſéparation par les regles ordinaires de l'Algebre, 41
Premier exemple, *ibid.*
LIII. Second exemple, 42
LIV. Troiſieme exemple, *ibid.*
LV. Exemples de cette même ſéparation par des transformations, *ibid.*
LXII. Cas plus généraux que les précédents qui s'intégrent de même.
Premiere formule, 46

LXIII. Application à un exemple, 46
LXIV. Seconde formule plus générale, 47
LXV. Application à un exemple, 48

CHAPITRE V.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI. Ce que c'eſt qu'une équation *homogene*, 49
LXVII. Solution générale du Problême, *ibid.*
LXVIII. Application à un exemple, 50
LXIX. Cette regle s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puiſſance qu'y ſoient élevées les dx & les dy, *ibid.*
LXXII. Elle s'étend auſſi aux équations homogenes qui contiennent plus de deux variables, en y faiſant toutefois quelque changement, 52
LXXIII. Exemple général, *ibid.*
LXXIV. Exemple particulier, 53

CHAPITRE VI.

Méthode pour rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas.

LXXVI. Elles ſont au nombre de deux, 54
LXXVII. Exemples de la premiere méthode. Premier exemple, *ibid.*
LXXIX. Second exemple, 55
LXXX. Troiſieme exemple, *ibid.*
LXXXII. Expoſition de la ſeconde méthode. Premiere formule pour les équations à trois termes, 56
LXXXV. Application de la formule à une équation particuliere, 58
LXXXVI. Seconde formule contenant les équations à quatre termes, *ibid.*
LXXXVII. Application de la formule à quelques équations particulieres. Premiere équation, 60
XC. Cas particulier aſſez étendu qui ſe ramene à l'homogénéité. Ce cas eſt repréſenté par l'équation $(ax+by+c).dx+(gx+fy+h).dy=0$, 62
XCI. Obſervations importantes ſur l'équation précédente, 63

CHAPITRE VII.

Sur la conſtruction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X'dx + Cy^q X''dx = 0$.

XCV. Procédé de la méthode, 66
XCVI. Obſervations ſur la méthode précédente, 68
XCVIII. Quelle eſt la généralité de la formule précédente, 69

CHAPITRE VIII.

Des Différentielles qui peuvent ſe ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

CI. Premiere formule de ces différentielles, 71
CII. Application à quelques exemples particuliers, 72
CIII. Seconde formule, *ibid.*
CIV. Application à un exemple, 74
CV. Troiſieme formule qui comprend les deux précédentes, *ibid.*
CVI. Application de cette formule à un exemple, 76
CVII. Quatrieme formule, *ibid.*
CVIII. Application à un exemple, 77
CIX. Formule précédente généraliſée, *ibid.*
CX. Application de la formule à un exemple; 79
CXII. Cinquieme formule, 80
CXIV. Son application à un exemple, 81

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI. Formule des équations à trois termes. . . . . Comparée avec celle du Chapitre VI. 82
CXVIII. Méthode pour trouver les cas dans leſquels on integre l'équation de Ricati, 84
CXXI. Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à cette équation $ax^m dx + by^2 x^n dx = dy$, dans la ſuppoſition de $n = 0$. 85

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII. Ces équations ſont toutes compriſes dans deux formules, 89
Premiere maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules; en examinant ceux dans leſquels elles peuvent devenir homogenes, *ibid.*
CXXIII. Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes. . . Appliquée à la premiere formule, 90
CXXIV. Application de cette même méthode à la ſeconde formule, 93

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cy^s dx = 0$.

CXXVI. Transformation néceſſaire dans le cas préſent.... Equation transformée, 94
CXXVII. Premiere ſuppoſition pour cette équation, *ibid.*
Nous fournit trois Théorêmes, 95
CXXIX. Seconde ſuppoſition qui donne auſſi trois Théorêmes, 97
CXXX. Troiſieme ſuppoſition... Fournit trois nouveaux Théorêmes, 100
CXXXI. Autre transformation dont on peut encore ſe ſervir, 101
Equation transformée, 102
CXXXII. Premiere ſuppoſition pour cette équation.... Nous donne un Théorême, *ibid.*
CXXXIII. Seconde ſuppoſition qui donne auſſi un Théorême, *ibid.*
CXXXIV. Dernier cas d'intégration de la formule, 103
CXXXVI. Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes, 104
CXXXVII. Examen de la premiere, *ibid.*
CXXXVIII. Examen de la ſeconde équation, 106

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manque.

CXL. Procédé de la méthode.... Quelle eſt la ſubſtitution qu'elle emploie, 108
Application de la méthode à quelques exemples, 109

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer pluſieurs équations différentielles dans leſquelles dx *&* dy *ſont élevées à différentes puiſſances.*

CXLVI. Conditions qu'exige cette méthode, 112
Formule des équations auxquelles on la peut appliquer.... Procédé de la méthode appliquée à cette formule, *ibid.*
CXLVII. Le cas des équations homogenes ſe réſout par cette méthode, 113
CXLVIII. Autre maniere plus générale de réſoudre le cas des équations homogenes, *ibid.*

CXLIX. Auſſi bien que l'équation du Chapitre VI. Art. xc. 114
CL. Application à une ſeconde formule, *ibid.*
Cas d'intégration de cette formule, 115
CLI. Maniere de les trouver, *ibid.*
CLII. Premier cas d'intégration, 116
CLIII. Second cas d'intégration de la même formule, *ibid.*
CLIV. Troiſieme cas d'intégration, 117
CLV. Celui des équations homogenes y eſt compris, 118
CLVII. Quatrieme & dernier cas d'intégration de la même formule, 119
CLIX. Recherche des cas d'intégration d'une troiſieme formule, *ibid.*

CHAPITRE XIV.

Autre méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CLXIII. Procédé de cette méthode, 122
CLXIV. Application de cette méthode, 123
CLXVII. Premier exemple, 124
CLXVIII. Second exemple, 125

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI. Cas dans leſquels on peut ſe ſervir de cette méthode, 127
CLXXII. En quoi elle conſiſte, 128
CLXXIII. Lemme préparatoire, *ibid.*
CLXXV. Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations, 129
CLXXVI. Obſervations néceſſaires ſur la ſolution précédente, 132
CLXXIX. Cas dans lequel on peut réſoudre autrement le Problême, 134
CLXXXI. Application de la méthode aux cas où l'on a trois équations, 136
CLXXXIII. Ce qu'il faut faire ſi on avoit quatre équations, 138

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV. Premier exemple, 139
CLXXXV. Second exemple, 140
CLXXXVI. Troiſieme exemple plus compliqué que les deux précédents, 141
CLXXXVIII. Quatrieme exemple qui renferme les trois autres, 143
CLXXXIX. Examen de quelques cas particuliers, 146

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des différentielles à plusieurs variables du second ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII. Notions préliminaires, 151

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du second ordre, dans le cas où l'on sait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme constante dans le passage des premieres différences aux secondes.

CXCVI. Premier exemple, 153
CXCVII. Second exemple, 154
CXCVIII. Troisieme exemple, *ibid.*
CC. Quatrieme exemple, 155

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII. Exposition de cette méthode appliquée à des différentielles du second ordre, 156
CCIII. Autre maniere de résoudre ce Problème, 157
CCIV. Application de la méthode aux différentielles du troisieme ordre, 158
CCVI. En quoi consiste l'utilité de cette méthode, 159
CCVII. Son application à plusieurs exemples, *ibid.*

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer dans quelques cas, la différentielle qui, ſuppoſée conſtante, facilitera le plus l'intégration.

CCXII. Son application à quelques exemples, 161

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré dans leſquelles l'une des indéterminées finies ne ſe trouve à aucun terme.

CCXVI. Conditions que cette méthode exige, 164
CCXVII. Son application à pluſieurs équations du ſecond ordre..... Premier exemple, 165
CCXVIII. Second exemple, *ibid.*
CCXIX. Autre maniere d'intégrer les équations précédentes, 166
CCXX. Appliquée à l'exemple précédent, *ibid.*
CCXXI. Troiſieme exemple, 167
CCXXII. Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le ſecond, 168
CCXXIII. 1°. A une équation du troiſieme ordre, 169
CCXXIV. 2°. A une équation du quatrieme, *ibid.*
CCXXV. Cas particuliers qui ſe ramenent aux précédens par le choix de la conſtante, 170
CCXXVI. Autres cas particuliers qui s'y ramenent par de ſimples ſubſtitutions, 171

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans leſquelles l'une des deux ne ſe trouve pas.

CCXXVIII. Fondements de cette méthode, 172

CCXXIX. Trois cas généraux auxquels elle s'applique, 173
CCXXX. Examen du premier cas de la méthode, 174
CCXXXIII. Application de la formule à deux exemples particuliers, 177
CCXXXV. Seconde partie de la méthode, 178
CCXXXVI. Application à un exemple, 179
CCXXXVII. Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes, 180
CCXXXVIII. Troisieme partie de la méthode comprend deux cas, 182
CCXXXIX. Premier cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+s} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+s-n} = dx^m ddy$. *ibid.*
CCXL. Application de la formule à un exemple, 183
CCXLI. Second cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, 184
CCXLII. Application de cette formule à un exemple, 185

CHAPITRE VI.

Application de la Méthode du Chapitre XV. de la premiere Section aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV. Conditions que cette méthode exige, 186
CCXLV. Procédé de la méthode, 187
CCXLVI. Son application à des exemples, *ibid.*

CHAPITRE VII.

Exposition d'une Méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2} y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en y supposant* $X = 0$.

CCXLIX. Procédé de cette méthode, 191
CCL. Examen des différents cas qui peuvent arriver, 192
CCLV. Application de la méthode à une équation différentielle du second ordre, 195
CCLVI. Son application à une équation du troisieme ordre, 196
CCLVII. A une équation d'un ordre n quelconque, *ibid.*

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Comparaiſon de la Méthode expoſée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI. Sect. II.

CCLVIII. Démonſtration de la méthode précédente, 197
CCLIX. Examen des cas différents d'après la méthode du Chap. VI. 199
CCLXIII. Application à un exemple du cinquieme ordre, 202
CCLXV. Application de la méthode du Chapitre VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée, 203
CCLXVI. Application de la formule à une équation différentielle du ſecond ordre, 204
CCLXVII. Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II. 206

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du ſecond ordre, repréſentées par la formule $(M)(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant.*

CCLXX. Quel eſt l'auteur de cette méthode, 210
Solution d'un Problême néceſſaire pour la ſuite, *ibid.*
CCLXXII. En quoi conſiſte la méthode, 212
On y peut faire uſage de deux ſeries différentes, *ibid.*
CCLXXIII. Premiere ſerie, 213
Equations de condition ſuivant leſquelles la premiere ſerie ſera terminée & la formule (*M*) intégrable, 215
CCLXXV. Seconde ſerie, *ibid.*
Cas dans leſquels cette ſeconde ſerie ſera terminée & la formule (*M*) intégrable, 217
CCLXXVI. Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents, *ibid.*
CCLXXVIII. Réduction de la formule (*M*) en une équation différentielle du premier ordre, 218
Cas dans leſquels la réduite (*V*) eſt intégrable, 219
CCLXXIX. Transformations de l'équation (*V*) en d'autres de trois termes, *ibid.*

CCLXXX. Premiere transformation, *ibid.*
Equation transformée qui n'a plus que trois termes, 221
CCLXXXI. Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation, 222
Premiere équation particuliere... Dans quels cas elle eſt intégrable, *ibid.*
CCLXXXII. Seconde équation particuliere.... Dans quels cas intégrable, 223
CCLXXXIII. Troiſieme équation particuliere.... Dans quels cas intégrable, 224
Quatrieme équation particuliere.... Dans quels cas elle eſt intégrable, 226
CCLXXXV. Seconde transformation pour l'équation (*V*), 227
Equation transformée (*H*).... Dans quels cas elle eſt intégrable, 229
CCLXXXVI. Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (*H*).... Premiere équation particuliere, *ibid.*
Quels ſont ſes cas d'intégrabilité, 230
CCLXXXVII. Seconde équation particuliere.... Dans quels cas elle ſe peut intégrer, *ibid.*
CCLXXXVIII. Troiſieme équation particuliere.... Dans quels cas elle ſe peut intégrer, 231
CCLXXXIX. Quatrieme équation particuliere.... Ses cas d'intégrabilité, 232
CCXC. Cinquieme équation particuliere (φ).... Ses cas d'intégrabilité, *ibid.*
Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (φ), *ibid.*
CCXCI. Sixieme équation particuliere (ξ).... Ses cas d'intégrabilité, 233
Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ), *ibid.*
CCXCII. Septieme équation particuliere, *ibid.*
Dans quels cas elle eſt intégrable, 234
CCXCIII. Huitieme équation particuliere intégrable, 235
CCXCIV. Application de la méthode précédente à une formule différentielle du ſecond ordre plus compliquée que la formule (*M*), *ibid.*

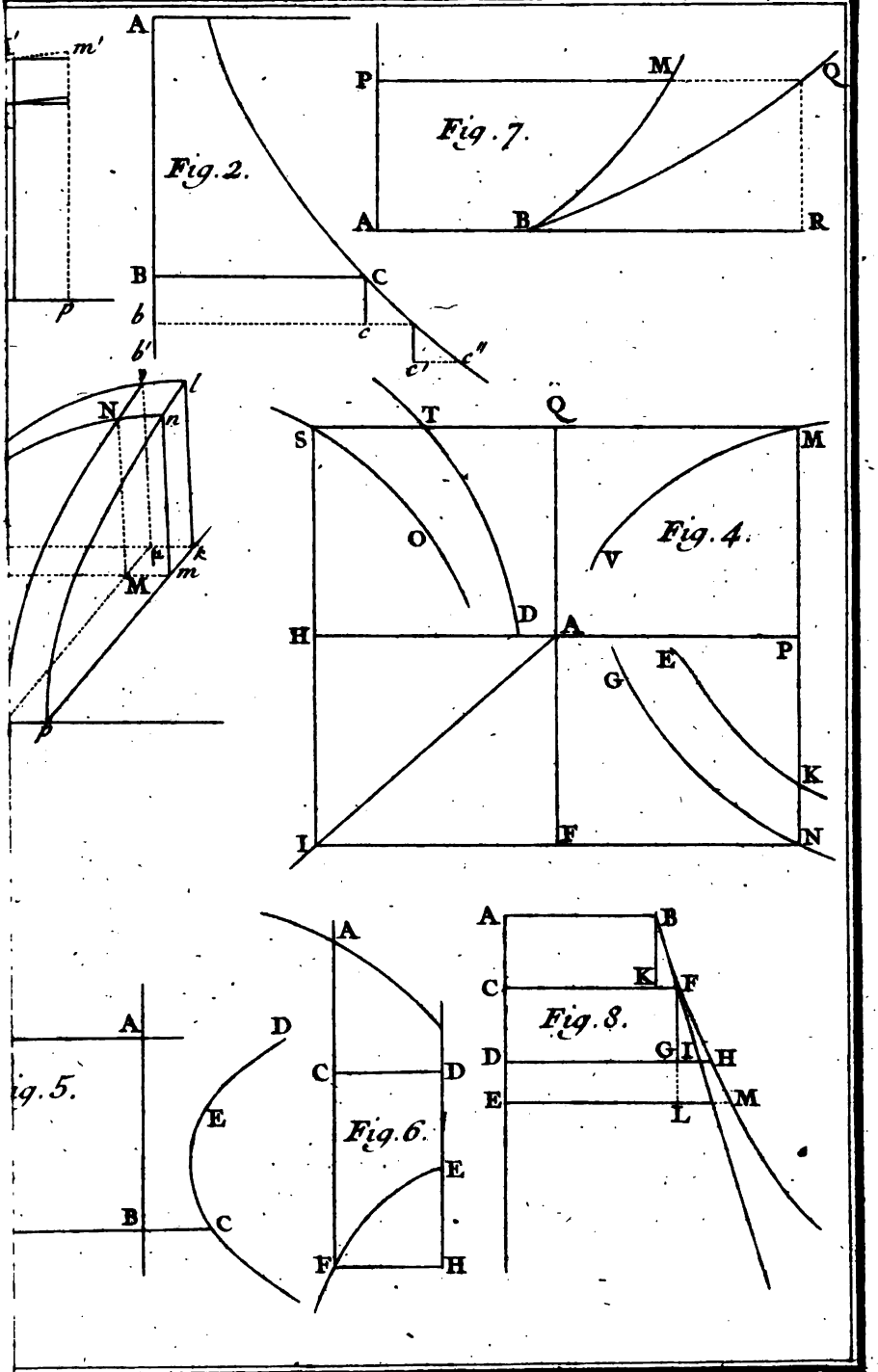
CHAPITRE X.

Examen de pluſieurs équations différentielles du ſecond ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV. Application à une équation différentielle du ſecond ordre, 238

CCXCVII. Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui ſert d'exemple, 239
CCCII. Autre méthode à laquelle s'applique notre méthode, 242
CCCVI. Application de la méthode à une équation différentielle du troiſieme ordre, 245

Fin de la Table des Matieres.


A
m'
p
B
C
b
c
b'
c'
c''
Fig. 2.
P
M
Q
A
B
R
Fig. 7.
N
n
M
m
p
T
Q
S
M
O
V
Fig. 4.
H
A
D
E
P
G
K
I
F
N
A
D
E
B
C
Fig. 5.
A
D
C
D
E
Fig. 6.
F
H
A
B
K
F
C
Fig. 8.
G
I
H
D
E
L
M